

А. В. ДАНИЛОВ, П. Н. МАТХАНОВ, Е. С. ФИЛИПОВ

А. В. ДАНИЛОВ
П. Н. МАТХАНОВ
Е. С. ФИЛИПОВ

.....

ТЕОРИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ

.....



**А. В. ДАНИЛОВ
П. Н. МАТХАНОВ
Е. С. ФИЛИПPOB**

.....

**ТЕОРИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ**

.....



Ленинград
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ
Ленинградское отделение
1990

ББК 31.211
Д18
УДК 621.3.011.72

Рецензент *Т. А. Глазенко*

Редактор *Ю. В. Долгополова*

Данилов Л. В. и др.
Д18 Теория нелинейных электрических цепей / Л. В. Данилов,
П. Н. Матханов, Е. С. Филиппов. — Л.: Энергоатомиздат. Ленингр.
отд-ние, 1990. — 256 с.: ил.
ISBN 5-283-04433-5

Излагаются основы теории нелинейных электрических цепей с учетом современных достижений. Большое внимание уделено перспективным и интенсивно развивающимся разделам теории, связанным с проблемами проектирования электротехнических устройств и применением современной технологической базы. Изложены качественные вопросы теории, методы синтеза, современные методы анализа нелинейных цепей.

Для инженерно-технических работников, студентов и аспирантов электротехнических и смежных специальностей.

Д $\frac{2202020000-131}{051(01)-90}$ 127-89

ББК 31.211

ISBN 5-283-04433-5

© Л. В. Данилов, П. Н. Матханов,
Е. С. Филиппов, 1990

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нелинейные электрические цепи давно стали неотъемлемой частью большинства электротехнических и электронных устройств. Широкое применение ЭВМ, развитие теории колебаний и теории нелинейных цепей дали мощный толчок для проектирования все более сложных нелинейных устройств. В свою очередь, усложнение современной электро- и радиотехнической аппаратуры, ужесточение требований к ней, необходимость учета и использования новых нелинейных эффектов явились хорошим стимулом для развития теории, используемой все шире как в традиционных областях — анализа и синтеза, так и в новейших направлениях — моделировании, идентификации, развитии качественных методов и т. д.

Вместе с тем ознакомление с учебной и монографической литературой, посвященной вопросам теории нелинейных электрических цепей, приводит к выводу, что здесь наблюдается заметное отставание от требований практики. Учебники и учебные пособия построены, как правило, по традиционному плану, соответствующему министерской программе курса "Теоретические основы электротехники", и не содержат многих современных актуальных разделов, таких, например, как идентификация и диагностика, моделирование и качественные методы. Студенты и аспиранты не смогут узнать из этих книг о современных подходах к синтезу нелинейных цепей, о том, какое серьезное внимание обращается в последнее время на исследование бифуркационных явлений, об открытии хаотических колебаний в детерминированных системах и т. д. Что же касается монографий, посвященных тем или иным разделам теории нелинейных электрических цепей, то их число чрезвычайно ограничено как в отечественной, так и в зарубежной литературе.

В предлагаемой читателю книге авторы поставили своей целью хотя бы в малой степени восполнить указанный пробел и дать читателю сведения (иногда лишь в начальной форме) об указанных выше актуальных проблемах. Книга не является учебным пособием, хотя для ее чтения в основном достаточно знания теории линейных электрических цепей и сведений из вузовского курса высшей математики.

Авторы включили в книгу и оригинальные научные и учебно-методические результаты, отражающие итоги многолетнего творческого сотрудничества кафедры теоретических основ электротехники Ленинградского электротехнического института имени В. И. Ульянова (Ленина) и кафедры теоретической электротехники Высшей технической школы города Ильменау (ГДР).

Сознавая, что в книге ограниченного объема нет возможности хотя бы кратко изложить все основные результаты, полученные к настоящему времени в теории нелинейных цепей, авторы исключили из рассмотрения такие разделы, как машинные методы анализа динамических цепей (они хорошо изложены в [38]), а также дискретные (цифровые) нелинейные цепи. В книге рассматриваются только цепи с детерминированными внешними воздействиями. По той же причине ряд вопросов изложен весьма бегло, на уровне постановки задачи и перечисления возникающих здесь проблем. При этом указывается литература, из которой читатели смогут почерпнуть более подробные сведения.

Первая глава содержит данные об основных элементах нелинейных цепей и их характеристиках. Сюда включены также сведения об искусственных элементах типа мемристоров, скалоров, мутаторов, применение которых во многих случаях упрощает решение задач моделирования и синтеза.

Вторая и третья главы посвящены вопросам составления уравнений нелинейных цепей, а также анализу резистивных цепей. Отмечены особенности составления уравнений и возникающие здесь проблемы. Материал этих глав является необходимой основой для понимания тех задач, которые встают перед проектировщиком при разработке машинных методов составления уравнений нелинейных цепей, а также анализа резистивных цепей.

В четвертой и пятой главах изложены классические методы исследования нелинейных цепей, относящиеся к наиболее мощным и развитым: метод фазового пространства и асимптотические методы. Авторы включили сюда некоторые сведения из новейших достижений, такие, например, как описание хаотических колебаний при детерминированных воздействиях.

Шестая и седьмая главы посвящены вопросам, не находившим до сих пор отражения в учебной литературе и слабо освещенным в монографиях: применению функциональных рядов в теории цепей и проблемам идентификации и диагностики. Актуальность этих вопросов приобретает все большее значение в связи с необходимостью решения задач контроля качества электронных изделий.

Восьмая глава содержит сведения, которые оказываются полезными на этапе предварительного проектирования нелинейных цепей. Это — сведения качественного характера, связанные с проблемами устойчивости колебаний, их единственности, возможности синтеза схем

с заданным элементным базисом и т. д. Такую информацию часто удастся получить, не проводя полного анализа цепи, а используя лишь самые общие предварительные данные о проектируемой цепи.

В трех последних главах изложены вопросы синтеза нелинейных цепей. Большая часть приведенных здесь сведений — это результаты разработок за последние 10–15 лет. Описаны методы синтеза формирующих цепей, цепей, компенсирующих нелинейные искажения, автогенераторов и делителей частоты, а также синтеза резистивных цепей с заданными характеристиками.

Разумеется, в книге небольшого объема невозможно полное изложение всех разделов современной нелинейной теории. Поэтому предлагаемое издание следует рассматривать как введение в теорию нелинейных электрических цепей.

Л. В. Даниловым написаны главы 6, 7 и 8, П. Н. Матхановым — главы 2, 3, 4 и 5. Глава 1 написана П. Н. Матхановым и Е. С. Филипповым, главы 9, 10 и 11 — Л. В. Даниловым и Е. С. Филипповым.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту книги проф. Т. А. Глазенко за ценные советы и замечания.

Отзывы о книге, замечания и пожелания просим присылать по адресу: 191065, Ленинград, Д-65, Марсово поле, д. 1, Ленинградское отделение Энергоатомиздата.

Авторы

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

1.1. ДВУХПОЛЮСНЫЕ РЕЗИСТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Электрическая цепь, в которую входит хотя бы один нелинейный элемент, обтекаемый током, называется нелинейной цепью. В отличие от элементов линейных цепей с постоянными параметрами параметры нелинейных элементов зависят от токов и напряжений. Свойства таких элементов нельзя определить с помощью одного постоянного параметра, а необходимо задавать зависимости между переменными (током и напряжением), называемые характеристиками элементов, во всем диапазоне изменения переменных. Характеристики элементов обычно определяются экспериментально и изображаются в виде графиков. Графики могут быть приближенно представлены аналитически, обычно в виде полиномов.

Как и линейные элементы, нелинейные подразделяются на резистивные, индуктивные и емкостные элементы. По числу внешних выводов различают элементы двухполюсные, четырехполюсные и многополюсные. Далее, характеристики элементов могут быть неизменными во времени (инвариантными) или изменяющимися во времени (переменными).

В данной главе приводятся сведения о характеристиках указанных элементов, которые можно назвать обычными или естественными элементами: они представляют собой модели реально существующих устройств. Далее излагаются вопросы преобразования нелинейных характеристик с помощью специальных линейных активных четырехполюсников. В заключение приводится описание так называемых искусственных элементов, или элементов высшего порядка, предложенных в последнее время и реализуемых с помощью специальных электронных схем.

Свойства двухполюсного резистивного элемента (рис. 1.1, *a*) определяются его вольт-амперной характеристикой — зависимостью тока от напряжения или напряжения от тока

$$i = f_R(u); \quad u = f_R^{-1}(i). \quad (1.1)$$

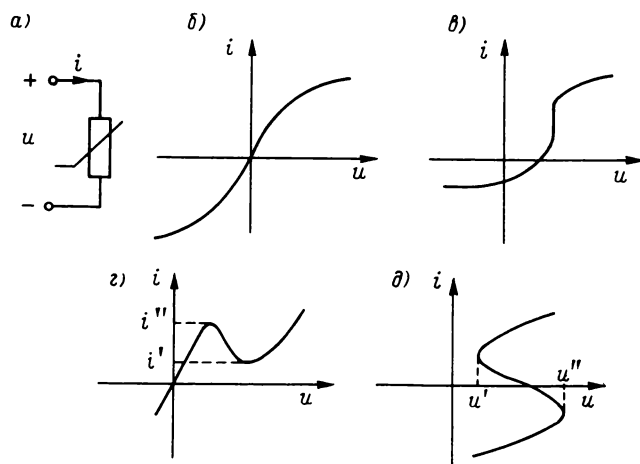


Рис. 1.1

Обычно вольт-амперные характеристики, получаемые экспериментально, представляются в виде графиков в системе координат u, i . Для представления в аналитической форме графики аппроксимируются в интересующих нас границах изменения переменных полиномиальными или трансцендентными выражениями.

Различают следующие виды типичных характеристик.

1. Монотонные характеристики (рис. 1.1, б): при изменении напряжения в пределах $-\infty < u < \infty$ производная di/du не изменяет своего знака, остается положительной или отрицательной. Если при этом производная остается конечной и не равной нулю, то говорят о строгой монотонной характеристике. Если же на некоторых участках производная обращается в нуль или бесконечность, т. е. характеристика (рис. 1.1, в) имеет горизонтально или вертикально расположенные участки, то говорят о нестрогой монотонной характеристике.

В случае строгой монотонной характеристики, записанной в аналитической форме $i = f_R(u)$, возможно ее обращение: решение относительно напряжения и представление в виде $u = f_R^{-1}(i)$.

2. Любая характеристика, не удовлетворяющая условию монотонности, является немонотонной. Немонотонная характеристика может иметь ряд участков, на которых ток с ростом напряжения падает. Наиболее распространены элементы с одним спадающим участком, с характеристиками двух типов: N и S.

На рис. 1.1, г показана характеристика туннельного диода, относящаяся к типу N. Эту характеристику, являющуюся однозначной функцией напряжения (каждому значению напряжения соответствует опре-

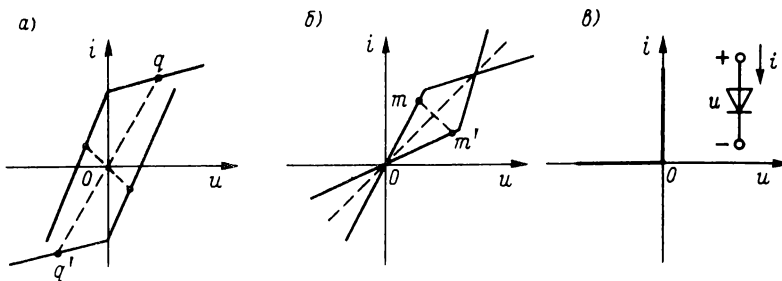
деленное одно значение тока), называют управляемой напряжением. Если рассматривать зависимость напряжения от тока, то она будет многозначной: при изменении тока в пределах $i' < i < i''$ будем получать три значения напряжения.

На рис. 1.1, δ изображена характеристика типа S, называемая управляемой током. Зависимость напряжения от тока здесь однозначна: каждому значению тока соответствует одно значение напряжения. Зависимость же тока от напряжения неоднозначна: при изменении напряжения в пределах $u' < u < u''$ будем получать три значения тока.

Характеристики классифицируют также по симметрии относительно начала координат. Характеристика двухполюсника симметрична, если она представляет собой нечетную функцию (рис. 1.1, δ): $f_R(u) = -f_R(-u)$. Если это соотношение не удовлетворяется, то имеем несимметричную характеристику (рис. 1.1, $\epsilon-\delta$).

Следует отметить, что при взаимной замене выводов характеристика двухполюсника симметричного вида остается неизменной. В случае же несимметричной характеристики взаимное переключение выводов изменяет ее вид. При переключении выводов изменяются на обратные знаки как напряжения, так и тока. Поэтому, если взять точку q исходной характеристики, определяемую радиусом-вектором \overrightarrow{Oq} (рис. 1.2, a), то одновременное изменение знаков напряжения и тока означает изменение на обратное направления радиуса-вектора $\overrightarrow{Oq} = -\overrightarrow{Oq}'$. Точка q' будет принадлежать искомой характеристике двухполюсника. При переключении выводов, проведя радиусы-векторы к различным точкам исходной характеристики и изменив их направления на противоположные, получим точки всей кривой.

Остановимся на построении графика обращенной характеристики в координатной системе u, i по заданной характеристике, построенной в системе i, u . Обе характеристики — исходная и обращенная — располагаются симметрично относительно прямой, проходящей через



начало координат под углом 45° . Поэтому, проведя указанную прямую, следует отобразить относительно нее точки исходной характеристики (рис. 1.2, б). Для этого достаточно провести перпендикулярно к указанной отображающей линии отрезки прямых: точки обеих характеристик располагаются на равных расстояниях по обе стороны отображающей линии.

Хотя для полного определения свойств нелинейного элемента требуется задание всей характеристики в границах ожидаемых предельных значений напряжений и токов, все же для отдельных точек вводят понятия статического и динамического сопротивлений. Статическим сопротивлением называют отношение напряжения в выбранной точке характеристики к току, имеющее всегда положительное значение, изменяющееся от точки к точке.

Под динамическим сопротивлением понимают отношение малого приращения напряжения в выбранной точке к соответствующему приращению тока

$$r_d = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di} \quad (1.1)$$

Динамическое сопротивление равно величине, обратной удвоенному угловому коэффициенту касательной к характеристике в рассматриваемой точке. В отличие от статического сопротивления оно на падающих участках характеристики принимает отрицательные значения.

Рассмотрим энергетические характеристики резистивного элемента. Мгновенная мощность элемента равна произведению абсциссы и ординаты точки характеристики: $p = ui$.

Если характеристика располагается в первом и третьем квадрантах, то знаки напряжения и тока одинаковы и мощность положительна ($p \geq 0$) при любых формах сигнала. Это означает, что элемент потребляет энергию и является пассивным.

Любой непассивный элемент является активным. Участки характеристики активного резистивного элемента располагаются во втором и четвертом квадрантах, в которых знаки тока и напряжения противоположны. Если рабочая точка лежит на указанных участках, то мощность отрицательна, что означает генерацию энергии элементом.

При построении моделей нелинейных устройств широко применяется идеализированный двухполюсный элемент — идеальный диод. Характеристика идеального диода состоит из двух перпендикулярных отрезков прямых, совпадающих с полуосями координат u , i (рис. 1.2, в). Ее можно записать таким образом

$$\begin{aligned} u &= 0; \quad i > 0; \\ i &= 0; \quad u < 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Первое уравнение соответствует проводящему состоянию, совпадающему с коротким замыканием, а второе — непроводящему, совпадающему с разрывом. Мощность элемента, очевидно, равна нулю: $p = ui = 0$.

1.2. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНЫЕ И ТРЕХПОЛЮСНЫЕ РЕЗИСТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

К нелинейным четырехполюсным и трехполюсным резистивным устройствам относятся такие электронные приборы, как управляемые электронные лампы и транзисторы. Четырехполюсный элемент можно описать уравнениями, связывающими две пары переменных: токи и напряжения на входе i_1, u_1 и на выходе i_2, u_2 . Любую пару из приведенных величин можно принять за независимую, а оставшуюся пару — за зависимую пару переменных. Для нелинейных четырехполюсников в качестве независимых переменных можно принимать ток или напряжение как выхода, так и входа, т. е. следующие пары: i_1, u_2 ; i_1, i_2 ; u_1, u_2 ; u_1, i_2 . Пары остальных переменных образуют зависимые переменные. Соответственно этому четыре системы нелинейных уравнений четырехполюсника запишутся так:

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(i_1, u_2); & u_1 &= \varphi_3(i_1, i_2); \\ i_2 &= \varphi_2(i_1, u_2); & u_2 &= \varphi_4(i_1, i_2); \\ i_1 &= \varphi_5(u_1, u_2); & i_1 &= \varphi_7(u_1, i_2); \\ i_2 &= \varphi_6(u_1, u_2); & u_2 &= \varphi_8(u_1, i_2). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Каждое из приведенных уравнений дает характеристику — зависимость одной из переменных входа или выхода от двух других переменных, принятых за независимые. Характеристика в трехмерном пространстве будет представляться поверхностью. Система двух уравнений, описывающая поведение четырехполюсника, будет геометрически изображаться двумя поверхностями.

Для представления трехмерных характеристик на плоскости приходится прибегать к изображению следа пересечения поверхностей плоскостями, перпендикулярными оси одной из независимых переменных. Для этого выбранную независимую переменную принимают в качестве постоянного параметра и получают семейство двухмерных характеристик, соответствующих различным значениям параметра.

Для описания поведения четырехполюсника можно выбрать любую из четырех систем (1.3), удобную для конкретного прибора. Если выбрана система уравнений, то первое уравнение должно дать входную характеристику — зависимость между током и напряжением входа, для чего выходная величина в правой части принимается за пара-

метр. Второе уравнение дает выходную характеристику — зависимость между напряжением и током выходных выводов; при этом входная величина в правой части принимается за параметр.

Входная и выходная характеристики четырехполюсного или трехполюсного прибора либо устройства снимаются экспериментально и представляются в виде графиков. По данным входных и выходных характеристик можно составить приближенные схемы замещения или модели нелинейных элементов. Модели эти строятся из двухполюсных линейных и нелинейных элементов и идеальных четырехполюсных элементов, называемых зависимыми или управляемыми источниками.

Четырехполюсный зависимый источник состоит из пары двухполюсных ветвей: входной и выходной. Входной ветвью является либо короткое замыкание, либо разрыв, а выходной — источник тока или напряжения. Но токи и напряжения выходных источников не являются заданными величинами, как в случае независимых источников, а зависят от тока или напряжения входной ветви — пропорциональны им.

На рис. 1.3 показаны общее обозначение четырехполюсника и схемы четырех типов управляемых источников, обозначенных ромбами для отличия их от независимых источников:

1. Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ): $u_2 = k_R i_1$.

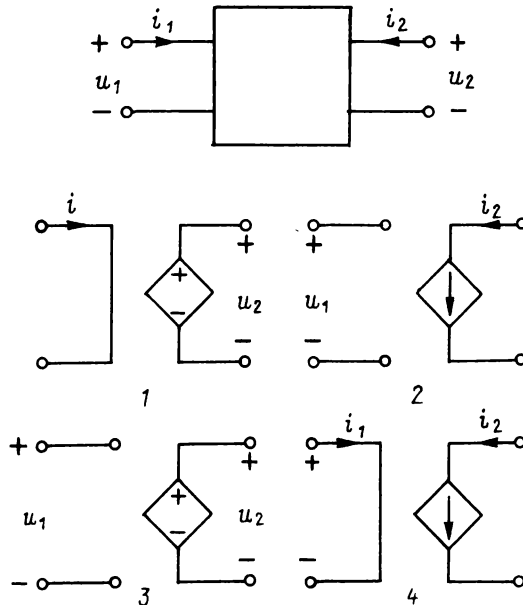


Рис. 1.3

2. Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН): $i_2 = k_G u_1$.
3. Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН): $u_2 = k_U u_1$.
4. Источник тока, управляемый током (ИТУТ): $i_2 = k_I i_1$.

Управляющие параметры k_i нелинейных зависимых источников, безразмерные или с размерностью сопротивления (k_R) либо проводимости (k_G), зависят от входных переменных; в случае линейных зависимостей источников они постоянны.

Зависимые источники являются активными элементами: потребляемая ими мощность отрицательна — или, иначе, они генерируют энергию. Если к выходу зависимого источника подключить сопротивление R , то в нем будет выделяться мощность $p = R i^2 = u^2 / R$, хотя мощность, поступающая через вход элемента извне, равна нулю.

Свойство активности зависимых источников позволяет осуществлять усиление мощности и разнообразные преобразования в цепи. Зависимые источники непременно входят в модели всех активных управляемых трехполюсных и многополюсных приборов, таких, как транзисторы, электронные лампы и т. п.

1.3. ИНДУКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Условное обозначение нелинейного двухполюсного индуктивного элемента изображено на рис. 1.4, а. Основной характеристикой элемента является вебер-амперная характеристика — зависимость потоко-сцепления от тока или тока от потоко-сцепления

$$\psi = f_L(i); \quad i = f_L^{-1}(\psi). \quad (1.4)$$

Потоко-сцепление и напряжение связаны соотношениями

$$\psi = \int_{-\infty}^t u dt; \quad u = \frac{d\psi}{dt}. \quad (1.5)$$

Из этих соотношений следует очень важный вывод о непрерывности потоко-сцепления в индуктивном элементе: при конечном напряжении потоко-сцепление в индуктивности не может изменяться скачком — является непрерывной величиной. Действительно, для момента $t = t_0$

$$\psi(t_0+) = \psi(t_0-) + \int_{t_0-}^{t_0+} u dt = \psi(t_0-). \quad (1.6)$$

В случае пассивного индуктивного элемента вебер-амперная характеристика располагается в первом и третьем квадрантах. Энергия, потребляемая таким элементом, положительна:

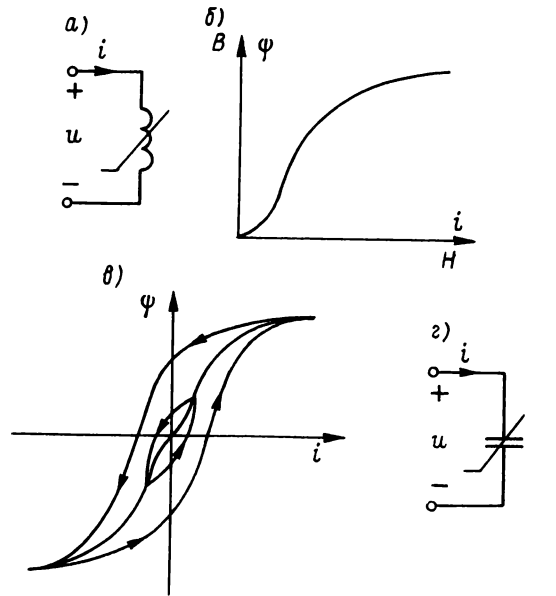


Рис. 1.4

$$w(t) = \int_{-\infty}^t u i dt = \int_0^{\psi} i d\psi \geq 0$$

в силу совпадения знаков обеих переменных.

Обычным нелинейным индуктивным элементом является катушка индуктивности, расположенная на замкнутом ферромагнитном сердечнике. Вебер-амперная характеристика определяется кривой намагничивания стали сердечника — зависимостью индукции от напряженности магнитного поля. На рис. 1.4, б изображена кривая начального намагничивания, снимаемая при медленном нарастании индукции в предварительно размагниченном материале. При симметричном периодическом намагничивании получаются гистерезисные петли (рис. 1.4, в), вершины которых располагаются на основной кривой намагничивания. Вебер-амперная характеристика обычного индуктивного элемента получается многозначной, сложным образом зависящей от предыстории процессов. При несимметричном намагничивании получаются несимметричные кривые намагничивания, называемые частными петлями.

При наличии нескольких катушек на ферромагнитном сердечнике получим нелинейный многополюсный элемент.

1.4. ЕМКОСТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Условное обозначение нелинейного емкостного элемента показано на рис. 1.4, з. Основная кулон-вольтная характеристика элемента выражается так:

$$q = f_C(u); \quad u = f_C^{-1}(q). \quad (1.7)$$

Заряд и ток элемента связаны соотношениями

$$q = \int_{-\infty}^t i dt; \quad i = \frac{dq}{dt}. \quad (1.8)$$

Отсюда следует также очень важный вывод о непрерывности заряда в емкостном элементе: при конечном токе заряд представляет собой непрерывную функцию, т. е. не может изменяться скачком; для момента $t = t_0$ имеем

$$q(t_0+) = q(t_0-) + \int_{t_0-}^{t_0+} i dt = q(t_0-). \quad (1.9)$$

Если кулон-вольтная характеристика элемента располагается в первом и третьем квадрантах, в которых знаки заряда и напряжения совпадают, то имеем пассивный элемент. Энергия, потребляемая элементом, здесь неотрицательна:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t i u dt = \int_0^q u dq \geq 0.$$

Обычным нелинейным емкостным элементом является электрический конденсатор из диэлектрика (диэлектрическая проницаемость которого зависит от напряженности электрического поля), а также барьерная емкость смещенного $p-n$ -перехода полупроводникового диода. Важное достоинство барьерной емкости состоит в применимости ее до очень высоких частот.

1.5. ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассматривавшиеся до сих пор элементы: резистивные, индуктивные и емкостные — представляли собой обычные, или естественные, элементы: "пробразы" их существуют и широко применяются на практике. К сожалению, не всегда удается подобрать требуемые характеристики определенного вида из имеющегося набора элементов или их комбинаций. В этих случаях можно прибегнуть к преобразованию характеристик существующих обычных элементов с помощью специаль-

ных активных четырехполюсных цепей — преобразователей с целью получения требуемых характеристик.

Преобразователь представляет активный резистивный четырехполюсник, к выходу которого подключается нелинейный преобразуемый двухполюсник с известной характеристикой. Схема активного трехполюсника — преобразователя должна изменить ток и напряжение выходной ветви таким образом, чтобы на входе получить нужную характеристику.

Получили известность следующие виды преобразователей.

С к а л о р. Это преобразователь, увеличивающий ординаты характеристики, т. е. ток, или ее абсциссы, т. е. напряжение (рис. 1.5, а). Подобное преобразование легко осуществить с помощью усилителей тока и напряжения, т. е. зависимых источников типа ИТУТ и ИНУН. На рис. 1.5, б показано включение параллельно выходу и входу ИТУТ, ток которого пропорционален току выхода. Ток на входе равен току выхода, умноженному на $1 + k_i$. На рис. 1.5, в показано последовательное включение ИНУН, напряжение которого пропорционально напряжению выхода, так что напряжение на входе равно выходному напряжению, умноженному на $1 + k_u$.

Ротатор позволяет получить на входе характеристику $i_1 = i_1(u_1)$, повернутую на угол θ по отношению к характеристике $i_2 = i_2(u_2)$ элемента, подключенного к выходу. На рис. 1.6, а показан поворот характеристики на угол $\theta = 45^\circ$, а на рис. 1.6, б — схема цепи, реализующая ротатор. Одно из сопротивлений получается отрицательным; его можно реализовать активной цепью. Уравнения Т-образной цепи, выраженные через параметры передачи, имеют вид

$$u_1 = (1 + R_1 G_3) u_2 + (R_1 + R_2 + R_1 R_2 G_3) (-i_2); \quad (1.10)$$

$$i_1 = G_3 u_2 + (1 + R_2 G_3) (-i_2).$$

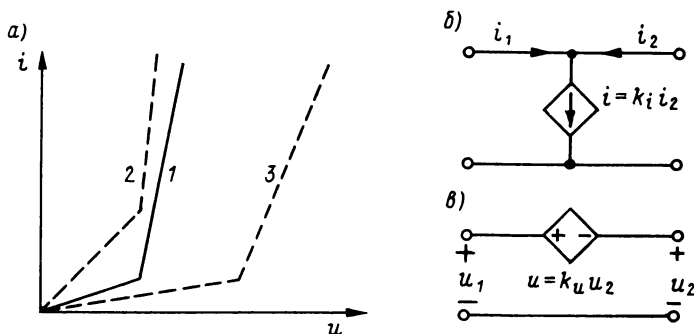


Рис. 1.5

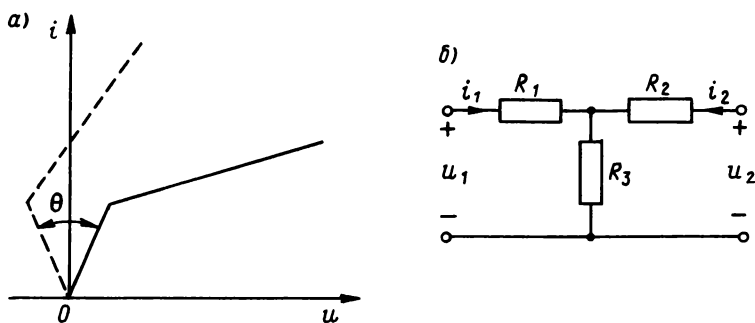


Рис. 1.6

С другой стороны, для преобразования координатной системы u_2, i_2 в новую систему u_1, i_1 , повернутую на угол против часовой стрелки, необходимо выполнение соотношений

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \cos \theta + i_2 R \sin \theta; \\ i_1 &= u_2 \sin \theta / R - i_2 \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где R — масштабный множитель.

Сравнение коэффициентов в (1.10) и (1.11) дает

$$R_1 = R(\cos \theta - 1) / \sin \theta; \quad G_3 = \sin \theta / R.$$

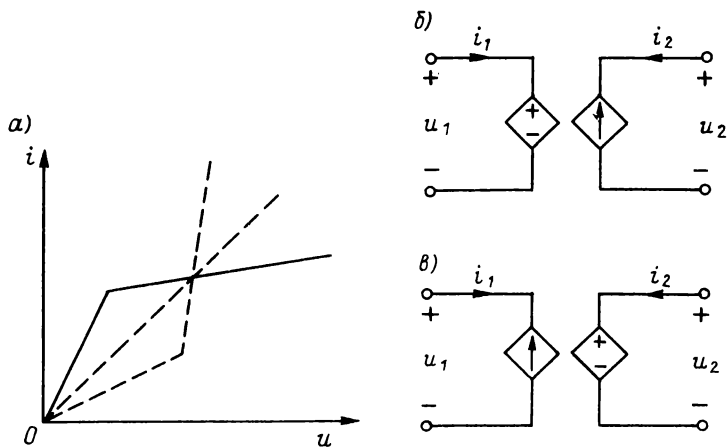


Рис. 1.7

Рефлектор — это преобразователь, производящий отображение характеристики элемента, присоединенного к выходу, относительно прямой, проходящей через начало координат. На рис. 1.7, *а* показано отображение, производимое рефлектором относительно прямой с угловым коэффициентом, равным 1. Реализующая схема имеет также Т-образную структуру, в выходное плечо которой последовательно включен зависимый источник напряжения, управляемый выходным током.

Мутатор. Преобразователь типа мутатора позволяет преобразовывать характеристику элемента одного вида, например резистивного, в характеристику элемента другого вида, например индуктивного (*RL*-мутатор) или емкостного (*RC*-мутатор). На рис. 1.7, *б* показана схема из зависимых источников, позволяющая реализовать *RL*-мутатор; входные переменные равны: $i_1 = -i_2$; $u_1 = du_2/dt$. На рис. 1.7, *в* приведена схема *RC*-мутатора, на входе которой имеем $u_1 = u_2$; $i_1 = di_2/dt$.

1.6. ЭЛЕМЕНТЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривавшиеся нелинейные элементы цепей имели неизменные во времени характеристики. Наряду с подобными элементами находят широкое применение элементы, характеристики и параметры которых не являются постоянными, а изменяются во времени.

Наибольший интерес представляет изменение параметров по периодическому закону. Нелинейные элементы с переменными во времени параметрами будут иметь характеристики, явно зависящие от времени:

$$\begin{aligned} u &= f_R(i, t); \quad i = f_R^{-1}(u, t); \\ \psi &= f_L(i, t); \quad i = f_L^{-1}(\psi, t); \\ q &= f_C(u, t); \quad u = f_C^{-1}(q, t). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Анализ процессов в цепях с нелинейными элементами, характеристики которых изменяются во времени, наталкивается на большие трудности. В большинстве случаев элементы указанных цепей работают в режиме малого уровня интересующих нас сигналов. Поэтому, как правило, можно произвести линеаризацию характеристик в окрестности рабочих точек. В результате оказывается возможным свести задачу к рассмотрению линейных элементов с переменными параметрами. Характеристики резистивного, индуктивного и емкостного элементов с изменяющимися во времени параметрами запишутся так:

$$\begin{aligned} u &= R(t)i; \quad i = G(t)u; \\ \psi &= L(t)i; \quad i = \Gamma(t)\psi; \\ q &= C(t)u; \quad u = D(t)q. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Сопротивление, индуктивность и емкость в отличие от элементов с инвариантными параметрами являются функциями времени. Рассмотрим наиболее важные их свойства.

Резистивный элемент. Зависимость тока линейного резистивного элемента (рис. 1.8, а) от напряжения в любой фиксированный момент будет изображаться прямой, проходящей через начало координат (рис. 1.8, б); зависимость же от времени отразится в повороте этой прямой между крайними положениями, соответствующими максимальному и минимальному сопротивлению.

Периодическое скачкообразное изменение сопротивления получают обычно с помощью переключений электронного ключа, шунтирующего часть резистора. Функцию сопротивления можно разложить в ряд Фурье:

$$R(t) = R_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k \cos(k \omega_1 t + \theta_k), \quad (1.14)$$

где ω_1 — угловая частота переключений ключа, определяющая основную частоту изменения сопротивления.

Емкостный элемент. Кулон-вольтная характеристика линейного емкостного элемента также может быть представлена в определенный фиксированный момент времени прямой, проходящей через начало координат. С течением времени будет происходить поворот этой прямой между крайними положениями, соответствующими максимальной и минимальной емкости.

Периодическое изменение емкости можно также получать с помощью ключа, включающего или отключающего часть конденсаторов.

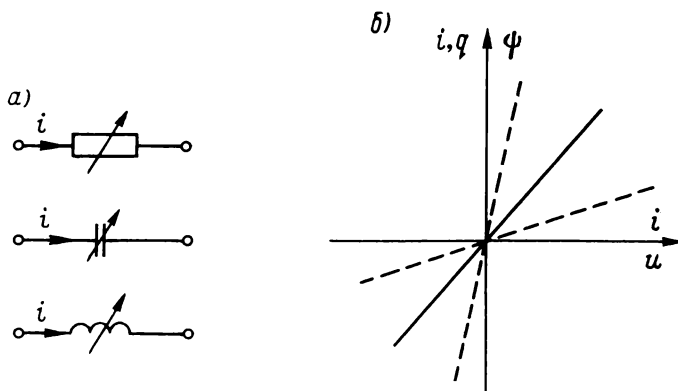


Рис. 1.8

Если ω_1 — угловая частота переключений ключа, то изменение емкости можно представить в виде ряда

$$C(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k \omega_1 t + \theta_k). \quad (1.15)$$

Индуктивный элемент. Вебер-амперная характеристика переменной индуктивности будет представляться прямой, проходящей через начало координат, совершающей повороты между крайними положениями, зависящими от L_{\max} и L_{\min} . Переменную индуктивность можно получать, изменяя коэффициент магнитной связи между двумя индуктивно связанными катушками.

1.7. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Наряду с рассмотренными обычными элементами: резистивными, индуктивными и емкостными, представляющими собой идеализацию реально существующих элементов, в последнее время [44] предложено ввести новые двухполюсные элементы, называемые элементами высшего порядка. Реальных прообразов таких элементов в природе не существует, но они могут быть реализованы с помощью соответствующих линейных активных цепей.

Число различных элементов высшего порядка может быть бесконечным. Каждый из них обладает особыми, присущими только ему свойствами и характеристиками.

Необходимость в указанных элементах вызывается следующими обстоятельствами:

- 1) требованиями реализации при решении некоторых задач синтеза нелинейных цепей с предписанным поведением;
- 2) требованиями построения моделей некоторых реальных устройств и систем;
- 3) потребностью в устранении возникающих иногда в цепях и системах тупиковых точек и состояний, противоречащих физическим законам.

Элементы высшего порядка можно ввести формальным обобщением характеристик обычных элементов. Будем применять оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}; \quad p^n = \frac{d^n}{dt^n}; \quad (1.16)$$

$$p^{-1} = \int_{-\infty}^t dt; \quad p^{-n} = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t (dt)^n.$$

Связи между током и зарядом, напряжением и потокоцеплением можно записать в виде

$$p^{-1}i = q; \quad p^{-1}u = \psi. \quad (1.17)$$

Соответственно характеристики нелинейных элементов трех видов: резистивного, индуктивного и емкостного — представляются как

$$\begin{aligned} u &= f_R(i); \quad i = f_R^{-1}(u); \\ p^{-1}u &= f_L(i); \quad i = f_L^{-1}(p^{-1}u); \\ p^{-1}i &= f_C(u); \quad u = f_C^{-1}(p^{-1}i). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Приведенные выражения характеристик нелинейных элементов можно формально обобщить, если ввести любые целые степени оператора дифференцирования. Обозначив целочисленные показатели степени оператора дифференцирования перед напряжением через β , а перед током — через α , можем характеристики трех видов элементов записать одним выражением

$$p^\beta u = f(p^\alpha i), \quad (1.19)$$

где $\alpha, \beta = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Для характеристик обычных элементов абсолютные значения показателей степени не превышают единицы: $|\alpha|, |\beta| \leq 1$, соответственно этому их можно назвать элементами низшего порядка. Имеем для элементов:

резистивного $\alpha = 0, \beta = 0$;
 индуктивного $\alpha = 0, \beta = -1$;
 емкостного $\alpha = -1, \beta = 0$.

Для полноты семейства элементов низшего порядка недостает элемента с $\alpha = -1$ и $\beta = -1$, который должен иметь характеристику вида

$$p^{-1}u = f_M(p^{-1}i) \quad \text{или} \quad \psi = f_M(q). \quad (1.20)$$

Элемент имеет характеристику, определяемую непосредственной связью между потокоцеплением и зарядом. Закона, дающего такую связь, в теории электромагнетизма нет, так что реального прообраза такого элемента не существует. Этот отсутствующий элемент, который все же может быть реализован с помощью электронной схемы, получил название мемристора. Перепишем (1.20) в виде

$$u = p f_M(p^{-1}i) = f'_M \left(\int_{-\infty}^t i dt \right) i = R_M i,$$

где $R_M = f'_M \left(\int_{-\infty}^t i dt \right)$ — нелинейное сопротивление элемента.

Сопротивление элемента определяется интегралом от тока в пределах от $-\infty$ до t , т. е. всей предыстории процессов, происходивших в элементе. Следовательно, мемристор представляет собой резистивный элемент с памятью. Следует отметить, что элемент этот находит применение в моделях некоторых объектов.

Отказ от ограничения $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ приводит к элементам высшего порядка с различным сочетанием целых значений α, β , число которых бесконечно. Каждой точке плоскости с целочисленной шкалой на координатных осях α, β (рис. 1.9) соответствует один $\alpha - \beta$ -элемент, имеющий свои особые свойства. На плоскости кружочками отмечены элементы низшего порядка, включая мемристор.

Рассмотрим свойства элементов высшего порядка с линеаризованными характеристиками в предположении малого уровня сигнала. В линейном случае функция $f(p^\alpha i) = m p^\alpha i$, так что

$$u = m p^{(\alpha - \beta)} i = m p^k i, \quad (1.21)$$

где $k = \alpha - \beta$ — разность показателей степени оператора перед током и напряжением.

Различные $\alpha - \beta$ -элементы с одинаковым k будут иметь одинаковые свойства. Это относится ко всем элементам, характеристики которых на плоскости α, β лежат на прямой $\beta = \alpha - k$.

В установившемся синусоидальном режиме при $i = I_m \cos(\omega t + \alpha_i) = \operatorname{Re} \dot{I}_m e^{j\omega t}$

$$\dot{U}_m = m(j\omega)^k \dot{I}_m.$$

Комплексное сопротивление элемента

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = j^k m \omega^k. \quad (1.22)$$

В зависимости от значения k , т. е. разности показателей степени α и β , будем иметь следующие виды комплексного сопротивления.

При $k = \dots -4, 0, 4, 8, \dots$

$$Z(j\omega) = m \omega^k. \quad (1.23)$$

Имеем частотно-зависимое положительное сопротивление; при $k = 0$ получается обычный резистивный элемент.

При $k = \dots -2, 2, 6, 10, \dots$

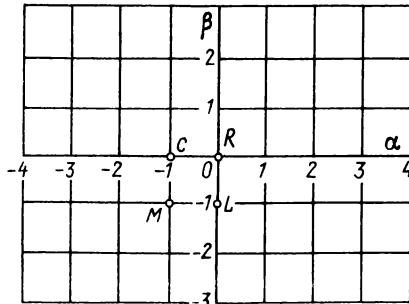


Рис. 1.9

Установим законы коммутации элементов высшего порядка.

1. При $k > 0$ напряжение $u = mp^k i$; имеем элемент, управляемый током, его мощность

$$p = iu = mi d^k i / dt^k. \quad (1.27)$$

Из того, что мощность конечна, следуют условия непрерывности тока и его $n - 1$ производных:

$$i(0-) = i(0+); i'(0-) = i'(0+); \dots; i^{(n-1)}(0-) = i^{(n-1)}(0+).$$

2. При $k < 0$ ток $i = p^k u/m$; имеем элемент, управляемый напряжением и потребляющий мощность

$$p = ui = \frac{1}{m} u d^k u / dt^k. \quad (1.28)$$

Чтобы мощность была конечной, необходима непрерывность напряжения и его $n - 1$ производных:

$$u(0-) = u(0+); u'(0-) = u'(0+); \dots; u^{(n-1)}(0-) = u^{(n-1)}(0+).$$

1.8. РЕАЛИЗАЦИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Элементы высшего порядка могут быть реализованы с помощью зависимых или управляемых источников.

Реализация нелинейных элементов высшего порядка, управляемых током. На рис. 1.11 показана принципиальная схема, которая реализует управляемый ток элемент высшего порядка.

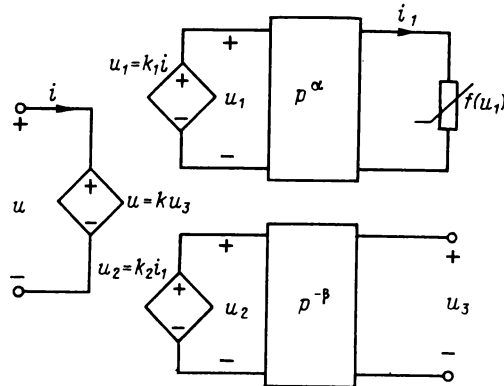


Рис. 1.11

Схема состоит из дифференцирующего (p^α) и интегрирующего ($p^{-\beta}$) четырехполосников; выход первого четырехполосника нагружен на нелинейное сопротивление с током i_1 , а выход второго с напряжением u_3 разомкнут. Ко входу обоих четырехполосников подключены зависимые источники напряжения, управляемые током i_1 нелинейного элемента и током входа схемы, состоящего из зависимого источника напряжения, управляемого в свою очередь напряжением u_3 .

Для напряжения на входе схемы имеем:

$$u = k u_3 = k p^{-\beta} u_2 = k k_2 p^{-\beta} i_1 = k k_2 p^{-\beta} f(p^\alpha u_1) = k k_2 p^{-\beta} f(p^\alpha k_1 i).$$

Обозначив $U_0 = k k_2$; $I_0 = k_1^{-1}$; $y = u/U_0$; $x = i/I_0$, получим

$$p^\beta y = f(p^\alpha x). \quad (1.29)$$

Реализация нелинейных элементов высшего порядка, управляемых напряжением. На рис. 1.12 представлена принципиальная схема, которая реализует управляемый напряжением элемент высшего порядка. Для тока на входе схемы имеем:

$$i = k u_3 = k p^{-\alpha} u_2 = k k_2 p^{-\alpha} i_1 = k k_2 p^{-\alpha} f^{-1}(p^\beta u_1) = k_1 k_2 p^{-\alpha} f^{-1}(p^\beta k_1 u).$$

Введя обозначения $I_0 = k k_2$; $U_0 = k_1^{-1}$; $x = i/I_0$; $y = u/U_0$, получим

$$p^\alpha x = f^{-1}(p^\beta y). \quad (1.30)$$

Реализация линейного элемента высшего порядка. В случае идеального линейного элемента n -го порядка имеем

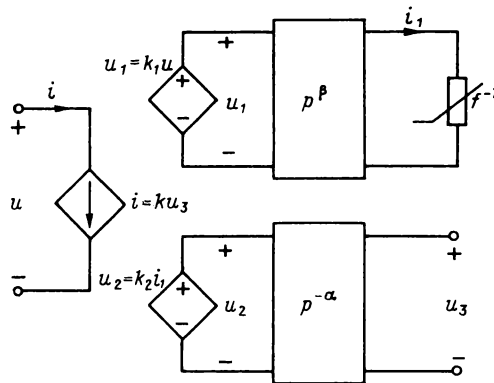


Рис. 1.12

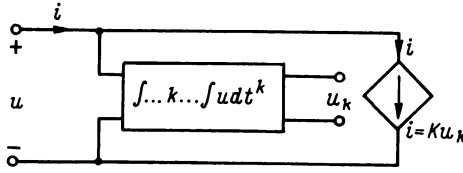


Рис. 1.13

$$x = \frac{1}{m} p^{-k} y.$$

После денормирования получим

$$i = \frac{1}{m T^k} \frac{I_0}{U_0} \int_{-\infty}^t \dots k \dots \int_{-\infty}^{t_k} u dt_1 \dots dt_k = K u_k,$$

где $K = I_0 / (U_0 m T^k)$.

Соответствующая реализующая схема идеального линейного двухполюсного элемента k -го порядка показана на рис. 1.13. Основным элементом — интегратор — может выполняться в виде известных схем пассивного RC -звена или активной RC -цепи с операционным усилителем. Обе реальные схемы интеграторов имеют погрешности, приводящие к искажениям при интегрировании. Соответственно этому характеристики реализующей схемы будут отличаться от характеристик идеального элемента высшего порядка.

При необходимости можно введением дополнительных параметров в схему замещения учесть влияние реальных интеграторов на искажения частотных характеристик элементов высшего порядка.

Остановимся кратко на важном вопросе устойчивости элементов высшего порядка. Рассмотрим устойчивость линейных элементов. Идеальный элемент высшего (n -го) порядка с сопротивлением $Z_n = K p^n$ как отдельный элемент контура вообще неустойчив. Устойчивость контура из последовательно соединенных элемента высшего порядка $Z_n(p)$ и линейного пассивного двухполюсника $Z_0(p)$ с входным сопротивлением $Z = Z_0(p) + Z_n(p)$ можно обеспечить выбором параметра двухполюсника.

Характеристическое уравнение контура будет определяться полиномом числителя входного сопротивления (его нулями)

$$K_n p^n + K_{n-1} p^{n-1} + \dots + K_1 p + K_0 = 0.$$

Соответствующее уравнение контурных токов будет:

$$u = K_n \frac{d^n i}{dt^n} + K_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + K_1 \frac{di}{dt} + K_0 i.$$

В этом уравнении слагаемое типа

$$u_\lambda = K_\lambda \frac{d^\lambda i}{dt^\lambda}$$

представляет собой идеальный элемент порядка λ . Коэффициенты $K_\lambda > 0$ ($\lambda = 0, 1, \dots, n$) должны удовлетворять условиям Гурвица. Для устойчивости элемента порядка n необходимо наличие всех элементов низшего порядка от $\lambda = n - 1$ до $\lambda = 0$. Элемент второго порядка требует присутствия элемента первого и элемента нулевого порядка. Элемент третьего порядка требует наличия элементов второго, первого и нулевого порядков.

Пусть сопротивление пассивного двухполюсника $Z_0 = pL + R$. Общее сопротивление цепи с элементом n -го порядка

$$Z(p) = Kp^n + pL + R.$$

Согласно требованию устойчивости следует полагать $n = 0; \pm 1; \pm 2$. Необходимые и достаточные условия устойчивости для указанных допустимых порядков элемента состоят в положительности коэффициентов полиномов, которые можно записать таким образом:

$$\begin{aligned} \text{при } n = 0 \quad Z(p) &= pL + R + K = 0, & (R + K)/L > 0; \\ \text{при } n = 1 \quad Z(p) &= p(L + K) + R = 0, & R/(L + K) > 0; \\ \text{при } n = 2 \quad Z(p) &= Kp^2 + pL + R = 0, & L/K > 0; \quad R/L > 0; \\ \text{при } n = -1 \quad Z(p) &= K + pR + p^2L = 0, & K/L > 0; \quad R/L > 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно по критерию Гурвица установить условия устойчивости при других сопротивлениях пассивного двухполюсника.

Рассмотрим преобразование элементов высшего порядка. Преобразованием элементов называют получение элемента одного вида с заданной характеристикой

$$p^{\beta_1} y_1 = f_1(p^{\alpha_1} x_1)$$

из элемента другого вида с характеристикой

$$p^{\beta_2} y_2 = f_2(p^{\alpha_2} x_2).$$

Осуществляем подобное преобразование с помощью особого преобразующего четырехполюсника. Преобразование элементов содержит два различных шага:

1) преобразование характеристик — получение характеристики f_1 из f_2 ;

2) мутацию — преобразование вида элементов из (α_2, β_2) в (α_1, β_1) .

Преобразование характеристик может быть линейным или нелинейным. Производится оно соответственно линейными или нелинейными преобразующими четырехполюсниками.

Линейное преобразование характеристик представляет собой линейное преобразование системы координат, при котором характеристику

$$p^\beta y_1 = f_1(p^\alpha x_1)$$

можно получить из характеристики

$$p^\beta y_2 = f_1(p^\alpha x_2) .$$

Преобразование следует произвести перемножением вектора $[p^\beta y_2 \ p^\alpha x_2]^T$ и матрицы передачи преобразующего четырехполюсника

$$\begin{bmatrix} p^\beta y_1 \\ p^\alpha x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^\beta y_2 \\ p^\alpha x_2 \end{bmatrix} .$$

Соотношение между токами и напряжениями определяется равенством

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} p^{(\alpha - \beta)} \\ a_{21} p^{(\beta - \alpha)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (1.31)$$

Линейное преобразование осуществляется преобразующим четырехполюсником с матрицей передачи $[a']$. Ее элементы вещественны, матрица регулярна.

Регулярность матрицы преобразований позволяет получать обратную матрицу и обеспечивает тем самым обратимость преобразования.

Мутация. При мутации производится преобразование степеней p , которое описывается системой уравнений

$$p^{\beta_1} y_1 = p^{\beta_2} y_2 ;$$

$$p^{\alpha_1} x_1 = p^{\alpha_2} x_2$$

или

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p^{\beta_2 - \beta_1} & 0 \\ 0 & p^{\alpha_2 - \alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} a'_{m11} & a'_{m12} \\ a'_{m21} & a'_{m22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Мутация осуществляется с помощью четырехполюсника — мутатора, нормированные параметры которого даны выражением (1.32).

Мутирующее линейное преобразование можно получить следующими друг за другом линейными преобразованиями и мутациями. Матрицу мутирующего линейного преобразования получаем следующим образом:

$$\begin{aligned}
a'_m &= \begin{bmatrix} p^{\beta_2 - \beta_1} & 0 \\ 0 & p^{\alpha_2 - \alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} p^{\alpha_2 - \beta_2} \\ a_{21} p^{\beta_2 - \beta_1} & a_{22} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} p^{\beta_2 - \beta_1} & a_{12} p^{\alpha_2 - \beta_1} \\ a_{21} p^{\beta_2 - \alpha_1} & a_{22} p^{\alpha_2 - \alpha_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{m11} & a'_{m12} \\ a'_{m21} & a'_{m22} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

К известным преобразующим четырехполюсникам относятся скалор, ротатор, рефлектор (см. § 1.6), а также известные гиратор, инвертор, конвертор отрицательного сопротивления.

Остановимся кратко на реализации линейных преобразователей. Преобразующий четырехполюсник в общем случае имеет четыре независимых параметра, так что для их реализации необходимо иметь четырехполюсник с четырьмя независимыми друг от друга элементами: пассивными двухполюсниками и зависимыми источниками. Реализация на основе матрицы параметров передачи приводит к схеме с тремя двухполюсниками, образующими Т- или П-структуру, и одним зависимым источником в виде источника тока или напряжения, управляемым током или напряжением. В случае зависимого источника напряжения он может подключаться последовательно к любой из трех пассивных ветвей. В случае же зависимого источника тока он может подключаться параллельно к любой из ветвей. Зависимые источники могут управляться напряжением входа или выхода или напряжением любого из трех ветвей, а также током входа или выхода или же током каждого из трех пассивных элементов четырехполюсника. Можно получить ряд реализующих схем. На рис. 1.14 приведено несколько схем Т- и П-типов. Если определитель параметров передачи четырехполюсника

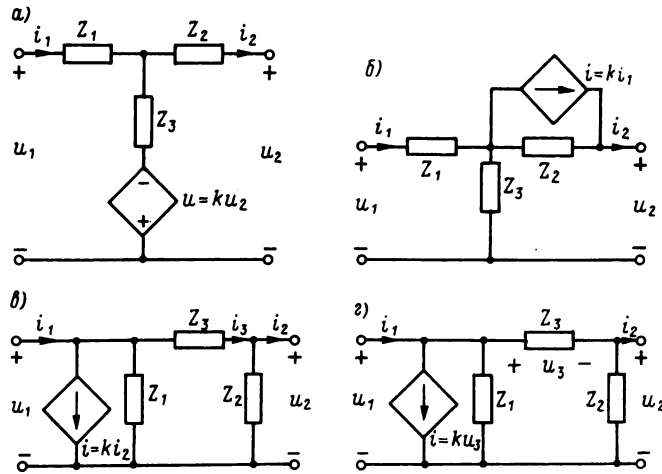


Рис. 1.14

равен единице, то $k = 0$ и зависимый источник не требуется: преобразующий четырехполюсник будет пассивным.

Не все теоретически возможные Т- или П-схемы четырехполюсника могут реализовать каждую из желательных пар (α_1, β_1) и (α_2, β_2) . Только такие пары технически реализуемы, для которых управляющий параметр представим в форме

$$k = \sum_{\lambda = -\mu}^{\nu} k_{\lambda} p^{\lambda} \quad (\lambda, \mu, \nu - \text{целые числа; } \mu \geq 0).$$

Если $\lambda = 0$, то источник является простым управляемым источником; если $\lambda > 0$, то — дифференцирующим управляемым источником; если, наконец, $\lambda < 0$, то — интегрирующим управляющим источником.

В заключение остановимся на примере применения введенных элементов к построению модели биполярного транзистора в режиме больших сигналов. Ниже, в § 3.4, дадим применение их для устранения тупиковых состояний, возможных в некоторых схемах. Анализ процессов дрейфа и диффузии носителей заряда в идеальном $n-p-n$ транзисторе в предположении распределения их концентрации в базовой области по экспоненциальному закону позволяет получить коэффициент усиления тока в виде трансцендентной функции ряда параметров: коэффициента дрейфа, ширины базы, диффузионной длины и частоты. Разложение трансцендентной части, входящей в знаменатель, в ряд и учет конечного числа его членов дают приближенное выражение коэффициента усиления тока следующего вида:

$$\alpha(p) = \frac{\alpha_0}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n} = \frac{I_K'(p)}{I_2'(p)}, \quad (1.34)$$

где p — нормированный оператор Лапласа; a_k — коэффициенты разложения, зависящие от отмеченных выше параметров; α_0 — коэффициент усиления на постоянном токе.

Рассматриваемый внутренний идеальный $n-p-n$ -транзистор изображен на рис. 1.15 в штриховом кружке. Для него, полагая $p = \tau_D s$ (где τ_D — время диффузии), при $s = j\omega$ имеем $p = j\tau_D \omega = j\Omega$; здесь $\Omega = \tau_D \omega$ — нормированная круговая частота. Согласно (1.34) находим

$$\alpha(s) = \frac{I'_K(s)}{I'_D(s)} = \frac{\alpha_0}{1 + A_1 s^2 + \dots + A_n s^n}; \quad A_i = a_i \tau_D.$$

Отсюда

$$I'_K(s) [1 + A_1(s) + A_2 s^2 + \dots + A_k s^k] = \alpha_0 I'_9(s). \quad (1.35)$$

Ток эмиттера

$$I'_3(s) = I'_6(s) + I'_K(s). \quad (1.36)$$

Для получения схемы замещения реального транзистора к идеальному внутреннему транзистору добавляются обычные резистивные и емкостные паразитные параметры, показанные на рис. 1.15.

Нас интересует нелинейная модель внутреннего транзистора с выводами ε' , κ' и δ' в режиме большого сигнала. В силу нелинейности модели следует перейти к дифференциальному уравнению в t -области заменой в (1.35) оператора s^k на d^k/dt^k . Введя переменную $i_{D_2} =$

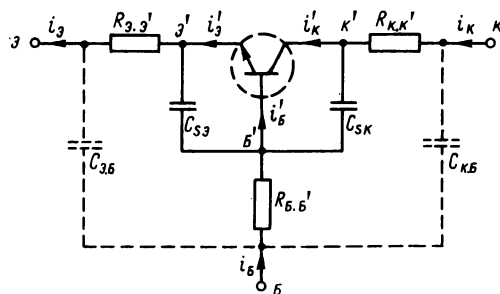


Рис. 1.15

$= i_K/\alpha_0$, при нулевых начальных условиях получим уравнение для тока эмиттера

$$i'_E = A_k \frac{d^k}{dt^k} i'_{D_3} + \dots + A_2 \frac{d^2}{dt^2} i'_{D_3} + A_1 \frac{di'_{D_3}}{dt} + i'_{D_3}. \quad (1.37)$$

Получим модель, с применением элементов высшего порядка. Из (1.37) и характеристики эмиттера $i'_{D_3} = f(u'_{D_3})$ следует

$$i'_E = A_k \frac{d^k}{dt^k} f(u'_{D_3}) + \dots + A_1 \frac{d}{dt} f(u'_{D_3}) + f(u'_{D_3}).$$

Это дифференциальное уравнение может без дальнейших преобразований моделироваться элементами высшего порядка

$$i'_{D_3} = f(u'_{D_3}); \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0;$$

$$i'_{D_{31}} = A_1 \frac{d}{dt} f(u'_{D_3}); \quad \alpha = -1, \quad \beta = 0;$$

.....

$$i'_{D_{3k}} = A_k \frac{d^k}{dt^k} f(u'_{D_3}); \quad \alpha = -k, \quad \beta = 0.$$

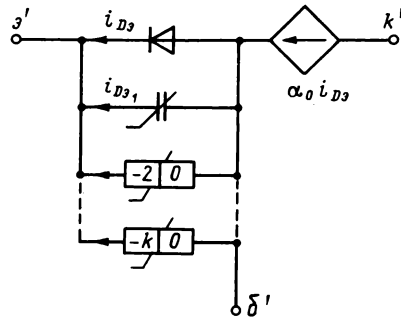


Рис. 1.16

Первый элемент представляет собой нелинейную диффузионную проводимость, второй — нелинейную диффузионную емкость. Остальные элементы суть элементы высшего порядка (рис. 1.16).

Численные расчеты коллекторных токов моделей транзисторного ключа с тремя элементами высшего порядка и модели Эберса—Молла показали, что первая модель дает несколько большую точность.

УРАВНЕНИЯ И АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АНАЛИЗА

Выделение и отдельное рассмотрение класса резистивных цепей, составленных из нелинейных резистивных элементов и зависимых, а также независимых источников, можно обосновать следующими соображениями: 1) анализ резистивных цепей, сводящийся к решению функциональных уравнений, намного проще анализа динамических цепей, составленных из элементов трех видов и описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений; 2) уравнения динамических цепей часто составляются явным выделением резистивной подцепи; 3) применение алгоритмов численного анализа динамических цепей сводит задачу к анализу резистивных цепей на каждом шаге итерации.

Электрические цепи, составленные из нелинейных резистивных элементов, описываются системами нелинейных функциональных уравнений — алгебраических и трансцендентных. Вид уравнений определяется функциями, которыми аппроксимированы вольт-амперные характеристики элементов.

Для постановки задачи анализа и последующего изложения очень важно отметить следующее: решение нелинейных функциональных уравнений, содержащих в явном виде время, в общем случае невозможно. Если исключить из рассмотрения элементы с изменяющимися во времени параметрами, то время в уравнениях появляется вследствие действия переменных сигналов.

Анализ нелинейных резистивных цепей при действии переменных сигналов оказывается практически осуществимым, если с учетом безынерционности цепи и отсутствия запаздывания реакции в ней принять следующий подход; ось времени разбивается на небольшие равные интервалы времени; в фиксированные моменты времени t_k , соответствующие концам этих интервалов, сигналам можно приписать определенные (постоянные) значения. Для каждого момента t_k получим уравнения, не содержащие времени; решение их дает соответствующие значения постоянных реакций. Проведя указанные расчеты последовательно для всех интересующих нас моментов времени, найдем реакции для выбранных точек интервала. Как видим, требуется многократное решение нелинейных функциональных уравнений, различающихся постоянными, представляющими напряжения и токи источников переменных

сигналов. Объем требуемых вычислений получается значительным так что необходима ЭВМ.

При одном источнике переменного сигнала, наиболее часто встречающемся на практике, анализ производят в два этапа:

1. Задаваясь рядом значений постоянного сигнала (напряжения или тока) на входе цепи f_{1k} , решают функциональные уравнения, не содержащие времени, получают значения реакций f_{2k} и по ним строят график зависимости $f_{2k} = \varphi(f_{1k})$ мгновенных значений реакции от мгновенных значений воздействия. Если интересующей нас реакцией является напряжение или ток выходной ветви, то зависимость $f_2 = \varphi(f_1)$ называют передаточной характеристикой. Если же реакция является током (напряжением) на входе, где действует источник напряжения (тока), то рассматриваемую зависимость называют входной характеристикой. Характеристики определяются при изменении f_1 в пределах между ожидаемыми максимальным и минимальным значениями переменного входного сигнала.

2. Для определения реакции как функции времени в аналитическом виде следует график входной или передаточной характеристики аппроксимировать некоторой функцией, например полиномом, и подставить в нее выражение $f_1(t)$:

$$f_2(t) = \varphi[f_1(t)]. \quad (2.1)$$

Можно также решение данного этапа получить более наглядным графическим способом построения проекций точек кривой входного сигнала относительно графика передаточной характеристики. На рис. 2.1 показана передаточная характеристика в координатной системе f_1, f_2 . Справа в координатной системе t, f_2 изображена полученная в результате построений искомая реакция на выходе цепи, а под ней — график входного сигнала, который принят в виде одного периода синусоиды. Для построения проекций точек под характеристикой $f_2(f_1)$ проведен под углом 45° отрезок прямой. Суть построений легко уяснить, проследив по штриховым линиям со стрелками проекции точки 1 на графике воздействия, которая последовательно переходит в точки 2, 3 (на характеристике) и 4 (на кривой реакции).

При графическом определении реакции цепи не требуется аппроксимации пере-

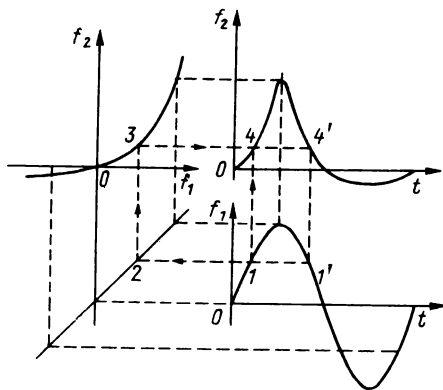


Рис. 2.1

даточной характеристики, которая вносит дополнительную погрешность.

Изложенное показывает, что определение формы реакций при известных передаточной и входной характеристиках является несложной задачей. Главные трудности связаны с нахождением характеристик, требующим решения систем нелинейных функциональных уравнений неявного вида, не содержащих времени t , $f(x) = 0$. При решении задач подобного рода возникают вопросы: существования решения, единственности решения, если оно существует, и определения решения. В случае систем сложных уравнений достаточно высокого порядка установление существования и единственности решения является очень трудным делом.

Аналитических методов решения указанных уравнений не существует. Основными методами здесь являются численные методы, применяемые при численном задании параметров и характеристик всех элементов.

Изложение начнем с рассмотрения основных алгоритмов численного решения нелинейных функциональных уравнений, которыми описывается резистивная цепь. Далее рассматриваются методы составления уравнений узловых напряжений, гибридных уравнений, анализ по линеаризованным дискретным моделям, кусочно-линейный метод и графический метод эквивалентного преобразования.

2.2. О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Наиболее эффективным методом решения систем нелинейных функциональных уравнений является численный метод, применение которого возможно при численном задании параметров и характеристик всех элементов и источников, приводящем к функциональным уравнениям с числовыми коэффициентами.

Наибольшее распространение получили два алгоритма уточнения решения систем нелинейных функциональных уравнений: 1) простой итерации; 2) Ньютона–Рафсона.

Оба метода требуют предварительной приближенной оценки корня (решения), которую можно производить, исходя из различных соображений; в случае одного уравнения оценку производят обычно с помощью графических построений. Изложим кратко суть обоих алгоритмов.

Алгоритм простой итерации. Рассмотрим решение одного функционального уравнения $F(x) = 0$, содержащего трансцендентные и алгебраические выражения. Пусть искомое истинное значение корня равно x_* , а грубое начальное его значение x_0 . Исходное уравнение представляют в виде

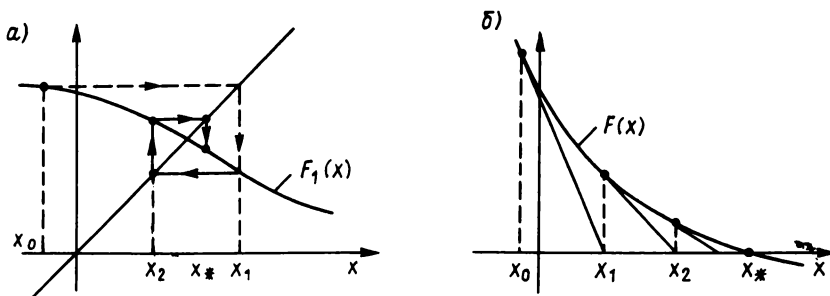


Рис. 2.2

$$x = F_1(x) \quad (2.2)$$

и в правую его часть подставляют $x = x_0$. Получившееся значение $x_1 = F_1(x_0)$ принимают за новое уточненное значение корня, которое снова подставляют в (2.2) и получают $x_2 = F_1(x_1)$. Процедуру вычисления

$$x_{k+1} = F_1(x_k) \quad (2.3)$$

продолжают до тех пор, пока разность $x_{n+1} - x_n$ не станет меньше некоторого, малого предписанного значения, если, конечно, процесс итерации сходится к истинному корню x_* .

Можно показать, что если на интервале между начальным приближенным значением корня и его точным значением модуль производной правой части (2.2) не превышает единицы,

$$|F'(x)| < 1, \quad (2.4)$$

то рассмотренная итерация сходится. Следовательно, угол наклона касательной к функции $F_1(x)$ на интервале $x_0 - x_*$ не должен превосходить 45° . При невыполнении этого условия приходится переходить к обратной функции.

На рис. 2.2, а приводятся графики функций $F_1(x)$ и x_1 , пересекающихся в точке с $x = x_*$, соответствующей точному значению корня. Построения, приведенные на рис. 2.2, а, показывают сходящийся процесс уточнения корня. В случае системы функциональных уравнений, например двух уравнений с двумя неизвестными, имеем представления

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(x_1, x_2); \\ x_2 &= F_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пусть x_{1k} и x_{2k} — значения корней, полученные уточнением на k -м шаге. Подставив их в систему уравнений, получим уточненные значения корней

$$\begin{aligned}x_{1,k+1} &= F_1(x_{1k}, x_{2k}); \\x_{2,k+1} &= F_2(x_{1k}, x_{2k}).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Как видим, на каждом шаге необходимо вычислять только значения функций по известным значениям переменных. В этой простоте вычислений состоит достоинство метода простой итерации.

Алгоритм Ньютона—Рафсона уточнения корня функционального уравнения $F(x) = 0$ производится также на ряде последовательных шагов. Пусть на k -м шаге получено значение корня x_k . Для получения следующего уточненного значения корня x_{k+1} разлагают $F(x)$ в ряд Тейлора, в котором ограничиваются линейными членами, и получают

$$F(x_{k+1}) \approx F(x_k) + F'(x_k)h_k,\tag{2.7}$$

где $h_k = x_{k+1} - x_k$ — приращение переменной.

Если уточненное значение корня принять близким к истинному, обращаемым в нуль (2.7), то приближенное значение искомого приращения корня

$$h_k = -F(x_k)/F'(x_k)\tag{2.8}$$

равно отношению функции к ее производной в конце предыдущего шага. Новое уточненное значение корня

$$x_{k+1} = x_k + h_k = x_k - F(x_k)/F'(x_k).\tag{2.9}$$

Вычисления по этому выражению проводятся до тех пор, пока приращение не станет меньше некоторого малого предписанного значения. Здесь требуется вычислять не только значение функции, но также значение ее производной.

Геометрическая иллюстрация метода Ньютона—Рафсона приведена на рис. 2.2, б. Касательная к $F(x)$ в точке x_k , которой представляется функция согласно учету линейных слагаемых ряда Тейлора, пересекает ось x в точке x_{k+1} . Разность $x_{k+1} - x_k = h_k$ дает поправку. Пересечение касательной в точке x_{k+1} к функции $F(x)$ с осью x дает новое уточненное значение корня, если процесс уточнения сходится.

Для обеспечения сходимости уточнения необходим выбор начального приближения достаточно близким к точному значению корня.

Следует отметить, что метод Ньютона—Рафсона обеспечивает более быструю сходимость, чем метод простой итерации.

Алгоритм Ньютона—Рафсона можно также обобщить для системы функциональных уравнений. В случае системы двух уравнений вида (2.5) уточненные корни обращают в нуль линейные приближения функций; согласно разложению в ряд Тейлора имеем

$$F_1(x_{1,k+1}, x_{2,k+1}) \approx F_1(x_{1k}, x_{2k}) +$$

$$+ h_{1k} \frac{\partial F_{1k}}{\partial x_1} + h_{2k} \frac{\partial F_{1k}}{\partial x_2} = 0; \quad (2.10)$$

$$F_2(x_{1,k+1}, x_{2,k+1}) \approx F_2(x_{1k}, x_{2k}) + h_{1k} \frac{\partial F_{2k}}{\partial x_1} +$$

$$+ h_{2k} \frac{\partial F_{2k}}{\partial x_2} = 0.$$

Здесь F_{ik} , $\partial F_{ik}/\partial x_i$ — значения функций и их производных при $x_1 = x_{1k}$ и $x_2 = x_{2k}$.

Поправки к значениям корней на каждом шаге определяются из решения систем линейных уравнений вида (2.10).

Наиболее эффективно применение алгоритма Ньютона–Рафсона в случае одного функционального уравнения или системы небольшого числа уравнений. Но при большом числе уравнений возникают трудности из-за необходимости на каждом шаге итерации вычислять n^2 частных производных и обращать матрицу размерности $n \times n$. Условия сходимости также существенно усложняются.

2.3. УРАВНЕНИЯ УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Уравнения узловых напряжений составляются для цепей, элементами которых являются: источники тока; двухполюсные резистивные элементы с монотонными характеристиками; двухполюсные элементы с немонотонными характеристиками; двухполюсные элементы с немонотонными характеристиками типа N, управляемые напряжением; зависимые источники тока, управляемые напряжением (ИТУН). Зависимые источники других типов следует преобразовать в ИТУН.

Переменными в методе узловых уравнений являются напряжения $n = n_y - 1$ узлов по отношению к базисному узлу (n_y — общее число узлов). За базисный желательно принимать узел, в который сходится наибольшее число нелинейных элементов.

Узловые уравнения, как и любая другая система уравнений, составляются на основе уравнений элементов и уравнений соединений цепи.

Уравнения двухполюсных нелинейных и линейных элементов:

$$i_k = f_k(u_k); \quad (2.11)$$

$$i_l = G_l u_l,$$

где G_l — проводимость элемента l .

Уравнение зависимого источника тока, управляемого напряжением u_{ij} между узлами i и j , имеет вид

$$i_m = g_m u_{ij}, \quad (2.12)$$

где g_m — управляющий параметр.

Уравнения соединений составляются по законам Кирхгофа. На основании закона напряжений выразим напряжения всех ветвей через разность напряжений узлов, между которыми включена ветвь k :

$$u_k = u_i^y - u_j^y. \quad (2.13)$$

При этом уравнения двухполюсных элементов (2.11) примут вид

$$\begin{aligned} i_k &= f_k(u_i^y - u_j^y); \\ i_l &= G_l(u_i^y - u_j^y), \end{aligned} \quad (2.14)$$

а уравнение зависимого источника тока (2.12) — вид

$$i_m = g_m(u_i^y - u_j^y). \quad (2.15)$$

Основную систему уравнений составляем по закону токов Кирхгофа, применяя его к каждому независимому узлу. Суммируя токи всех присоединенных к независимому узлу ветвей: двухполюсных, зависимых и независимых источников тока, получим

$$\sum_k i_k + \sum_l i_l + \sum_m i_m = \sum_q i_{0q}, \quad (2.16)$$

где i_{0q} — токи независимых источников тока.

Искомые узловые уравнения получаются, если во всех $n_y - 1$ уравнениях вида (2.16) заменить токи выражениями их (2.14) и (2.15) через узловые напряжения.

Рассмотрим пример. Составим узловые уравнения цепи (рис. 2.3), подключенной к источнику тока и содержащей два линейных элемента с проводимостями $G_1 = 2$, $G_3 = 1$; два нелинейных сопротивления с характеристиками

$$i_2 = 0,5 u_2^3, \quad u_4 = i_4^{1/3}$$

и один зависимый источник тока, управляемый током ветви l ,

$$i_5 = g_m i_1.$$

Приняв нижний узел за базисный, имеем три независимых узла: 1, 2, 3. Напряжения ветвей выражаются через напряжения узлов следующим образом:

$$u_1 = u_1^y - u_2^y; \quad u_2 = u_2^y; \quad u_3 = u_3^y; \quad u_4 = u_1^y - u_3^y.$$

Ток ветви 1, управляющий током зависимого источника тока, $i_1 = G_1 u_1 = 2u_1$ пропорционален напряжению ветви 1, так что

$$i_5 = 2g_m(u_1^y - u_2^y).$$

Токи двухполюсных элементов также выразим через узловые напряжения:

$$i_1 = 2(u_1^y - u_2^y); \quad i_2 = 0,5(u_2^y)^3;$$

$$i_3 = u_3; \quad i_4 = (u_1^y - u_3^y)^{1/3}.$$

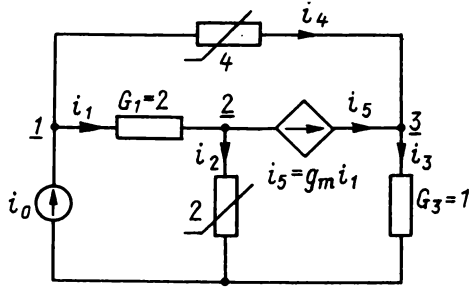


Рис. 2.3

Суммируем токи в каждом независимом узле и после замены токов приведенными выражениями получаем узловые уравнения

$$i_1 + i_4 = 2(u_1^y - u_2^y) + (u_1^y - u_3^y)^{1/3} = i_0;$$

$$-i_1 + i_2 + i_5 = 0,5(u_2^y)^3 + 2(g_m - 1)(u_1^y - u_2^y) = 0; \quad (2.17)$$

$$i_3 - i_4 - i_5 = u_3^y - (u_1^y - u_3^y)^{1/3} - g_m(u_1^y - u_2^y) = 0.$$

Уравнения узловых напряжений получены в виде системы трех нелинейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными узловыми напряжениями. Решение этой системы можно произвести с помощью рассмотренных выше итерационных алгоритмов. При этом желательно, если возможно, уменьшить число уравнений путем исключения некоторых переменных. В системе (2.17) можно из первого уравнения выразить u_2^y через u_1^y , u_3^y и исключить его из двух остальных уравнений. В результате получим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными напряжениями узлов 1 и 3.

В заключение отметим, что изложенные этапы получения узловых уравнений можно формализовать, вводя векторы переменных, векторы вольт-амперных характеристик и матрицу соединений (матрицу инцидencji) [38].

2.4. ДИСКРЕТНЫЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ СХЕМЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

До сих пор предполагалось, что анализ нелинейных резистивных цепей производится в следующем порядке: сначала составляется система нелинейных функциональных уравнений на основе нелинейных уравнений элементов — аналитических представлений характеристик в виде трансцендентных и алгебраических выражений. Затем с помощью численных методов, в частности алгоритма Ньютона—Рафсона, решается система функциональных уравнений. Недостаток такого подхода со-

стоит в трудностях получения нелинейных уравнений цепи. Возможен другой подход, дающий совершенно одинаковый результат анализа, но устраняющий затруднения с составлением уравнений.

Суть подхода состоит в том, что алгоритм Ньютона–Рафсона применяется не к составленным функциональным уравнениям цепи, а непосредственно к уравнению или характеристике каждого элемента. Для вольт-амперной характеристики элемента, выраженной в аналитическом виде $i = f(u)$, алгоритм Ньютона–Рафсона дает для тока $i_{k+1} = f(u_{k+1})$ на $(k+1)$ -м шаге выражения:

$$\begin{aligned} i_{k+1} &= f(u_k) + f'(u_k)(u_{k+1} - u_k) = i_k - g_k u_k + g_k u_{k+1} = \\ &= \hat{i}_{0k} + g_k u_{k+1}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где u_k — значение напряжения на k -м шаге, в окрестности которого произведено разложение в ряд Тейлора; $g_k = f'(u_k)$ — эквивалентная проводимость на k -м шаге, равная значению производной; $\hat{i}_{0k} = i_k - g_k u_k$ вычисляется по значениям тока и напряжения на предыдущем шаге.

Полученному выражению тока на $(k+1)$ -м шаге (2.18) можно сопоставить схему (рис. 2.4, а), составленную из источника тока с током $\hat{i}_{0k} = i_k - g_k u_k$, соединенного параллельно с линейным резистивным элементом с проводимостью $g_k = f'(u_k)$. Параметры элементов схемы определяются по значениям тока и напряжения, а также производной на предыдущем шаге.

Таким образом, получена дискретная линеаризованная схема замещения нелинейного элемента для каждого шага итерации. При переходе от шага к шагу структура схемы остается неизменной, изменяться будут лишь параметры ее элементов.

Заменяя каждый нелинейный элемент схемой рис. 2.4, а, получим дискретную линеаризованную цепь, которая является схемой, или целевой, моделью алгоритма Ньютона–Рафсона.

Поскольку цепь является линейной, то для формирования узловых уравнений и их решения можно использовать алгоритмы и программы численного анализа линейных резистивных цепей.

Рассмотрим пример анализа нелинейной цепи с помощью дискретных линеаризованных моделей. На рис. 2.4, б показана цепь перекрытой Т-образной структуры с тремя независимыми узлами, питаемая от двух источников постоянного тока $i_{01} = 2$ и $i_{02} = 1$. Характеристики элементов

$$i_1 = 4u_1; \quad i_2 = 2u_2^3; \quad i_3 = 2u_3; \quad i_4 = 3u_4^{1/3}.$$

Для нелинейных элементов 2 и 4 параметры линеаризованной дискретной схемы на k -м шаге будут

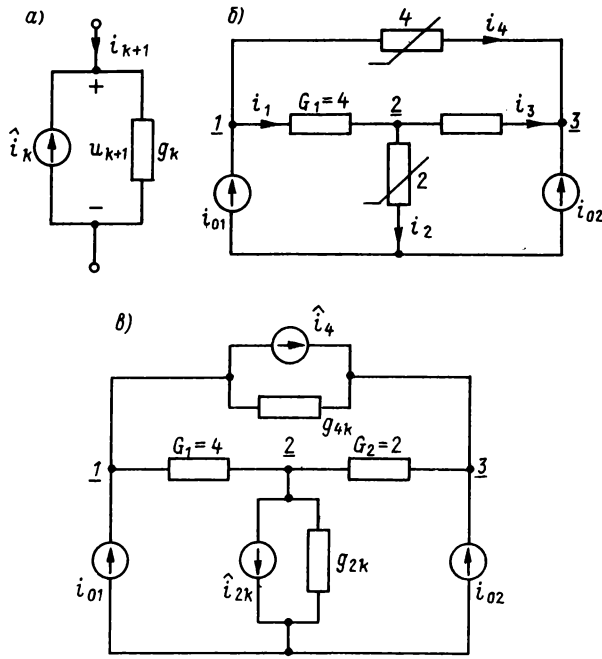


Рис. 2.4

$$g_{2k} = f'_2(u_k) = 6u_{2k}^2; \quad \hat{i}_{02} = i_{2k} - g_{2k}u_{2k} = -4u_{2k}^3;$$

$$g_{4k} = f'_4(u_{4k}) = u_{4k}^{-2/3}; \quad \hat{i}_{04} = i_{4k} - g_{4k}u_{4k} = 2u_{4k}^{1/3}.$$

На рис. 2.4, в показана линеаризованная дискретная схема цепи. Примем нижний узел за базисный и выразим напряжения ветвей через напряжения трех независимых узлов 1, 2, 3

$$u_1 = u_1^y - u_2^y; \quad u_2 = u_2^y; \quad u_3 = u_2^y - u_3^y; \quad u_4 = u_1^y - u_3^y.$$

Составляем уравнения равновесия токов в трех узлах, выражая токи через собственные и взаимные проводимости узлов:

$$(G_1 + g_{4k})u_1^y - G_1u_2^y - g_{4k}u_3^y = i_{01} - \hat{i}_{04};$$

$$-G_1u_1^y + (G_1 + g_{2k} + G_3)u_2^y - G_3u_3^y = -\hat{i}_{02};$$

$$-g_{4k}u_1^y - G_3u_2^y + (G_3 + g_{4k})u_3^y = i_{02} + \hat{i}_{04}.$$

Подставляем сюда дискретные параметры, а также искомые узловые напряжения и получаем уравнения дискретной цепи

$$\begin{aligned} (4 + u^{-2/3}_{4k}) u^y_{1,k+1} - 4u^y_{2,k+1} - u^{-2/3}_{4k} u^y_{3,k+1} &= 2 - 2u^{1/3}_{4k}; \\ -4u^y_{1,k+1} + 6(1 + u^2_{2k}) u^y_{2,k+1} - 2u^y_{3,k+1} &= -4u^3_{2k}; \\ -u^{-2/3}_{4k} u^y_{1,k+1} - 4u^y_{2,k+1} + (2 + u^{-2/3}_{4k}) u^y_{3,k+1} &= 1 + 2u^{1/3}_{4k}. \end{aligned}$$

2.5. ГИБРИДНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

В качестве искоемых переменных в гибридных уравнениях принимаются как напряжения, так и токи ветвей цепи. Элементами нелинейной резистивной цепи могут быть: линейные и нелинейные резистивные двухполюсники с любыми характеристиками, управляемыми как током, так и напряжением, линейные зависимые источники всех четырех типов, независимые источники напряжения и тока.

Гибридные уравнения снимают все ограничения рассмотренных узловых уравнений на допустимую элементную базу, поскольку элементы могут иметь немонотонные характеристики любого вида и допустимы любые зависимые источники. Одно из важных достоинств гибридного метода состоит в том, что при малом числе нелинейных элементов можно получить соответственно решения с меньшим объемом вычислений. В узловом методе нет возможности использовать преимущества малого числа нелинейностей.

Составление уравнений начинают с построения так называемого нормального дерева цепи. В качестве ветвей нормального дерева следует принять: 1) каждый источник напряжения; 2) каждый нелинейный резистивный элемент, характеристика которого управляется напряжением или задана в виде зависимости от напряжения; 3) линейные резистивные элементы, нужные для образования $n_y - 1$ ветвей дерева. В качестве дополнений, или хорд, принимаются: 1) каждый нелинейный резистивный элемент, характеристика которого управляется током или задана в зависимости от тока; 2) каждый источник тока; 3) остальные линейные резистивные элементы.

Нелинейные элементы с монотонными характеристиками, допускающими обращение, следует представлять, если это возможно, теми зависимостями, которые позволяют упростить составление уравнений.

Для получения независимых уравнений соединений заданной цепи по законам Кирхгофа необходимо: 1) для каждой ветви дерева наметить главное сечение, состоящее кроме этой единственной ветви

дерева из ряда ветвей — хорд, и по закону равновесия токов выразить токи всех ветвей дерева через токи хорд; 2) для каждой хорды наметить главный контур, состоящий кроме этой единственной хорды из ряда ветвей дерева, и по закону равновесия напряжения выразить напряжения всех хорд через напряжения ветвей дерева.

Основными в полученных уравнениях являются выражения токов в ветвях дерева, представляющих собой нелинейные элементы, управляемые напряжением, и выражения напряжений хорд, представляющих собой нелинейные элементы, управляемые током. Взяв за исходные указанные основные уравнения, следует с помощью остальных уравнений соединений и уравнений элементов исключить из основных уравнений по возможности все остальные переменные. Следует попытаться уменьшить число полученных уравнений путем дальнейшего исключения переменных, сведя их в пределе к одному уравнению. К сожалению, последнее не всегда достижимо. Рассмотрим пример.

Пример 2.1. На рис. 2.5, а изображена нелинейная резистивная цепь, составленная из двух нелинейных элементов 1, 4, двух линейных сопротивлений R_2 и R_3 , источника тока i_0 и источника напряжения u_0 . Примем следующие уравнения элементов:

$$i_1 = f_1(u_1) = -\alpha_1 u_1 + \alpha_3 u_1^3; \quad (2.19)$$

$$u_2 = R_2 i_2; \quad u_3 = R_3 i_3; \quad (2.20)$$

$$u_4 = f_4(i_4) = -\beta_1 i_4 + \beta_3 i_4^3. \quad (2.21)$$

Соответствующее характеристикам элементов дерево графа цепи показано на рис. 2.5, б. Для главных сечений графа имеем уравнения

$$i_1 = -i_3 - i_4; \quad (2.22)$$

$$i_2 = i_3 + i_4 - i_0; \quad i_3 = i_{u_0}. \quad (2.23)$$

Для главных контуров получаем

$$u_4 = u_1 - u_2; \quad (2.24)$$

$$u_3 = u_1 - u_2 - u_0; \quad u_2 = u_{i_0}. \quad (2.25)$$

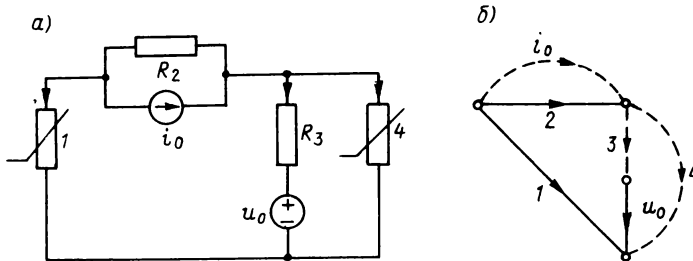


Рис. 2.5

Уравнения (2.22) и (2.24) являются основными. Задача состоит в том, чтобы в правой части этих уравнений оставить только напряжения и токи нелинейных ветвей дерева (u_1) и ветвей связи (i_4), а также независимых источников (u_0 , i_0). Для этого с помощью остальных уравнений соединений и уравнений элементов необходимо исключить переменные линейных элементов (u_2 , i_2 , u_3 , i_3). Используя (2.20), переписываем (2.23) и (2.25)

$$\frac{u_2}{R_2} - i_3 = i_4 - i_0;$$

$$u_2 + R_3 i_3 = u_1 - u_0.$$

Решение этой системы дает

$$u_2 = -\frac{R_2}{R_2 + R_3} (u_1 + R_3 i_4 - u_0 - R_3 i_0);$$

$$i_3 = \frac{1}{R_2 + R_3} (u_1 - R_2 i_4 - u_0 + R_2 i_0).$$

Подставив эти переменные и характеристики (2.19) и (2.21) в (2.22) и (2.24), получим систему двух уравнений

$$f_1(u_1) = -\alpha_1 u_1 + \alpha_3 u_1^3 = \frac{1}{R_2 + R_3} (-u_1 - R_3 i_4 + u_0 + R_2 i_0); \quad (2.26)$$

$$f_4(i_4) = -\beta_1 i_4 + \beta_3 i_4^3 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} (u_1 - R_2 i_4 + \frac{R_2 u_0}{R_3} + R_2 i_0).$$

Составление уравнений нелинейных цепей с параметрами, заданными в общем виде, по приведенной методике становится затруднительным с усложнением структуры. При числовом задании параметров и характеристик и численных методах анализа с использованием ЭВМ необходима формализация процедуры формирования уравнений на основе матричной записи. Мы не будем рассматривать матричную формулировку уравнений нелинейных резистивных цепей. Укажем лишь, что исходные уравнения соединений, составленные по законам Кирхгофа, вида (2.22)–(2.25) записываются через матрицы главных сечений и главных контуров. Уравнения линейных элементов записываются через диагональные матрицы сопротивлений или проводимостей. Преобразованием исходных уравнений в матричной форме можно получить матричные выражения для искомых токов ветвей дерева, соответствующих нелинейным элементам с характеристиками вида $i = f(u)$, и для напряжений хорд, представляющих собой элементы с характеристиками вида $u = f_1(i)$.

Рассмотрим составление уравнений выделением линейной и нелинейной подцепей. Процедура начинается с выделения из заданной

цепи всех нелинейных резистивных элементов и с представления согласно теореме замещения: элементов с характеристиками вида $i = f(u)$ источниками напряжения, а элементов с характеристиками вида $u = f_1(i)$ источниками тока (рис. 2.6). Оставшаяся часть, состоящая из линейных резистивных элементов и независимых источников напряжения и тока, образует линейную подцепь. Задача составления уравнений сводится к определению выражений для токов i_{ak} источников u_{ak} , замещающих элементы, управляемые напряжениями, и для напряжений u_{bj} источников i_{bj} , замещающих элементы, управляемые токами. Указанные искомые величины будут зависеть от напряжений и токов как источников, замещающих нелинейные элементы, так и независимых источников.

Удобно рассматривать отдельно действие замещающих источников и действие независимых источников. Реакции i'_{ak} и u'_{bk} на действие всех источников u_{ak} и i_{bk} определяются при отсутствии независимых источников — коротком замыкании и разрыве выводов источников напряжения и тока. Реакции i''_{ak} и u''_{bk} на действие независимых источников определяются при отсутствии источников, замещающих нелинейные элементы, — коротком замыкании и разрыве выводов источников u_{ak} и i_{bk} .

Результирующие реакции получим суммированием:

$$i_{ak}(u_{ak}) = i'_{ak} + i''_{ak}, \quad k = 1, 2, \dots, \nu; \quad (2.27)$$

$$u_{bj}(i_{bj}) = u'_{bj} + u''_{bj}, \quad j = \nu + 1, \nu + 2, \dots, n.$$

Каждое уравнение здесь нелинейное.

Пример 2.2. Составим уравнения рассмотренной в предыдущем разделе цепи (см. рис. 2.5, а) с двумя нелинейными элементами. Выделение нелинейных элементов 1 и 4 и их замещение соответственно источником напряжения и источ-

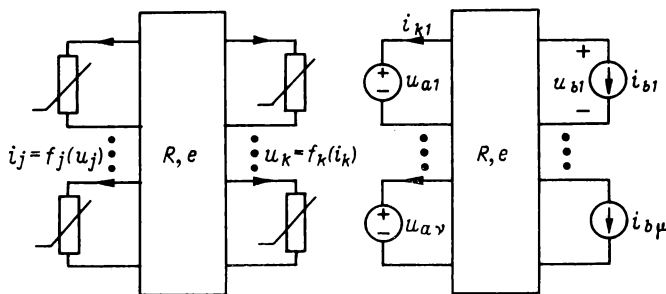


Рис. 2.6

ником тока дают схему, показанную на рис. 2.7, а, с подцепью из линейных элементов (в штриховом прямоугольнике) и независимых источников.

Найдем выражения тока i_1 источника напряжения u_1 и напряжение u_4 источника тока i_4 , используя наложение реакций: 1) от действия источников, замещающих элементы 1 и 4 на рис. 2.5, а (рис. 2.7, б), при отсутствии независимых источников и 2) от действия независимых источников при отсутствии источника u_1 (короткое замыкание выводов) и источника тока i_4 (размыкание выводов — рис. 2.7, в). Для схемы рис. 2.7, б, используя наложение реакций от действия источников u_1 и i_4 , имеем

$$i_1' = - \frac{u_1}{R_2 + R_3} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} i_4;$$

$$u_4' = \frac{R_3}{R_2 + R_3} u_1 - \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i_4.$$

Для схемы рис. 2.7, в также на основе наложения получаем

$$i_1'' = \frac{1}{R_2 + R_3} u_0 - \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_0;$$

$$u_4'' = \frac{R_2}{R_2 + R_3} u_0 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i_0.$$

Суммирование полученных реакций и введение нелинейных характеристик дает систему двух нелинейных уравнений с искомыми переменными u_1 и i_4 :

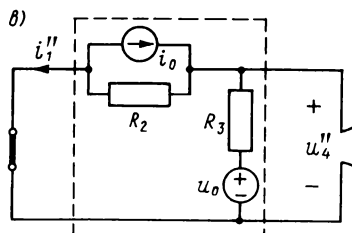
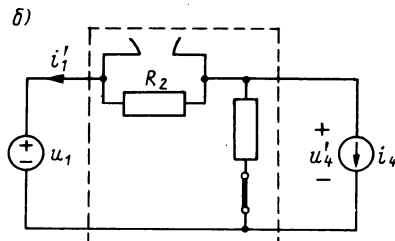
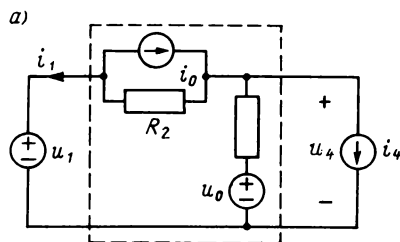


Рис. 2.7

$$f_1(u_1) = \frac{-1}{R_2 + R_3} u_1 - \frac{R_3}{R_2 + R_3} i_4 + \frac{1}{R_2 + R_3} u_0 - \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_0;$$

$$f_4(i_4) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} u_1 - \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i_4 + \frac{R_2}{R_2 + R_3} u_0 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i_0.$$

Введя матрицу коэффициентов при искомым переменных и при внешних сигналах

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 + R_3} & -\frac{R_3}{R_2 + R_3} \\ \frac{R_3}{R_2 + R_3} & -\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 + R_3} & -\frac{R_2}{R_2 + R_3} \\ \frac{R_2}{R_2 + R_3} & \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \end{bmatrix},$$

а также векторы переменных и воздействия

$$\mathbf{y} = [u_1 \quad i_4]^T; \quad \mathbf{e} = [u_0 \quad i_0]^T,$$

уравнения можно записать в матричной форме

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{H} \mathbf{y} + \mathbf{M} \mathbf{e}.$$

Матрица \mathbf{H} представляет собой матрицу гибридных параметров резистивной многополюсной цепи, не содержащей независимых источников. Элемент h_{ik} матрицы представляет собой отношение реакции i -го входа цепи к воздействию на k -м входе при отсутствии воздействия на всех остальных входах. В зависимости от того, током или напряжением являются реакции и воздействие, h_{ik} может иметь размерность проводимости, сопротивления или быть безразмерным.

Из схемы рис. 2.7, б можно, положив $i_4 = 0$, получить $h_{11} = i_{11}/u_1$; $h_{41} = u_{41}/u_1$, а положив $u_1 = 0$, определить $h_{14} = u_{14}/i_4$; $h_{44} = u_{44}/i_4$. Эти параметры и являются элементами найденной гибридной матрицы.

2.6. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Кусочно-линейный метод основан на замене отдельных участков характеристик всех нелинейных элементов цепи отрезками прямых (рис. 2.8, а). Число линейных участков, на которые разбивается заданная вольт-амперная характеристика, зависит от ее формы, области ожидаемого изменения тока и напряжения и требуемой точности расчета. На каждом линейном участке резистивный элемент можно представить уравнением прямой

$$i = k u + I_k; \quad u = k' i + U_k, \quad (2.28)$$

где k — угловой коэффициент прямой в координатной системе u, i , а $k' = 1/k$ в координатной системе i, u ; I_k — ордината точки пересечения прямой с осью тока, а U_k — абсцисса точки пересечения прямой с осью напряжения.

Уравнениям (2.28) соответствуют две схемы (рис. 2.8, б, в): б — схема из параллельно соединенных источников тока с током I_k и проводимости $G_k = k$; в — схема из последовательно соединенных источника напряжения с напряжением U_k и сопротивления $R_k = 1/k$. Если переменные — ток и напряжение — находятся в пределах k -го участка

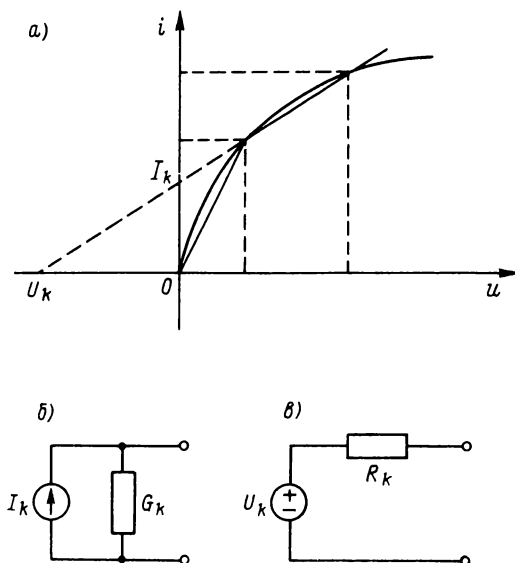


Рис. 2.8

линеаризации, параметры $I_k(U_k)$, $G_k(R_k)$ остаются постоянными: имеем линейную цепь. При переходе на другой участок линейного представления вследствие изменения переменных параметры изменятся, но структура замещающей цепи останется неизменной.

Какую из двух схем применять, зависит от выбранного метода анализа: при методе узловых напряжений предпочтительна схема с источником тока, а при методе контурных токов — схема с источником напряжения. Следует также учитывать, что в частном (редком) случае горизонтального участка возможно применение только первой схемы, которая будет состоять из источника тока, так как $G_k = k = 0$, а при наличии вертикального участка возможно применение только второй схемы, которая будет состоять из источника напряжения, поскольку $k' = 0$.

Если ток и напряжение элемента находятся в пределах k -го участка линеаризации, то параметры схемы замещения остаются постоянными: имеем линейную цепь. При переходе на другой участок вследствие изменения переменных элемента параметры изменятся, но структура (топология) замещающей схемы останется неизменной.

При анализе резистивной цепи по кусочно-линейному методу каждый нелинейный элемент заменяется приведенными простыми линейными схемами, параметры которых соответствуют определенному сочетанию линейных участков отдельных элементов. В результате получается линейная цепь, анализ которой можно произвести методами теории линейных цепей.

При изменении уровня входного сигнала, принимаемого постоянным, ток и напряжение одного из элементов могут превысить граничные значения, что вызовет переход кусочно-линейной характеристики через точку излома на следующий линейный участок и соответственно этому новое сочетание участков.

Критерием подходящего сочетания линейных участков является выполнение условия, чтобы ток и напряжение в любом элементе находились в пределах между точками излома или сопряжения линейных участков. Для проверки этого условия необходимо определять токи или напряжения каждого линеаризованного элемента при очередном следующем уровне входного постоянного сигнала. Если указанное условие не выполняется, т. е. хотя бы для одного элемента ток и напряжение выходят за пределы, то следует переходить к следующей комбинации линейных участков. Для изменения амплитуды входного постоянного сигнала в некоторых пределах всегда имеется единственное подходящее сочетание линейных участков. В конкретных случаях небольшого числа элементов и линеаризованных участков такое сочетание можно установить без большого труда.

В случае же большого числа элементов и линейных участков сделать это заранее затруднительно, требуется перебор комбинаций участков с проверками. В этом поиске подходящих сочетаний при изменении

амплитуды входного сигнала состоит трудность кусочно-линейного метода. С другой стороны, для каждого принятого сочетания линейных участков цепь является линейной, анализ которой легко провести. При этом топология схем остается неизменной; каждый раз при переходе на следующее сочетание изменяются параметры линеаризованной схемы одного элемента.

При численном задании параметров линеаризованных участков всех элементов расчеты проводятся с помощью ЭВМ. При этом с некоторыми видоизменениями можно использовать программы анализа линейных цепей.

Полученные в результате расчетов входная и передаточная характеристики будут иметь также кусочно-линейный вид, причем каждый их линейный участок будет соответствовать определенному сочетанию линейных участков всех элементов цепи. Для иллюстрации кусочно-линейного метода рассмотрим небольшой пример.

Пример 2.3. Найти входную и передаточную характеристику цепи, показанной на рис. 2.9, а. Кусочно-линейные характеристики элементов (рис. 2.9, б) имеют следующие участки и параметры при точках излома 1 (0,5; 1) и 2 (1,5; 0,5):

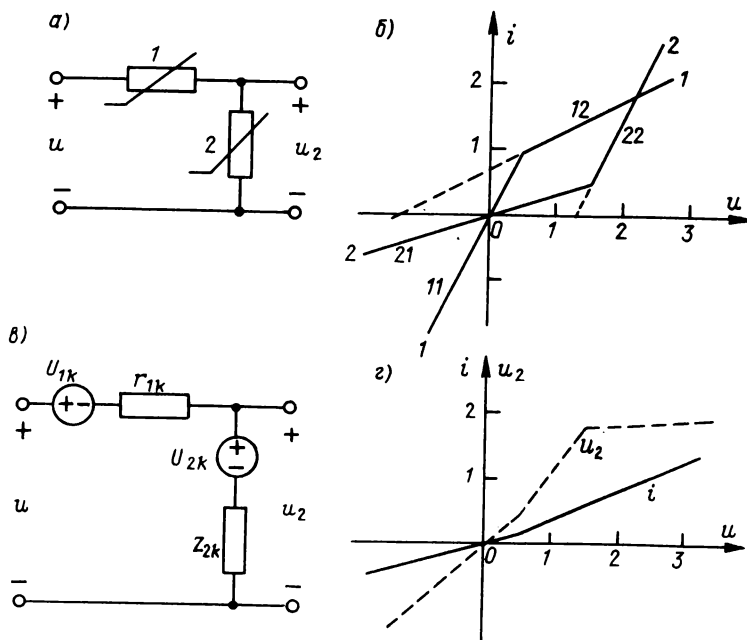


Рис. 2.9.

11:	$u < 0,5;$	$r_{11} = 0,5;$	$U_{11} = 0,0;$
12:	$u > 0,5;$	$r_{12} = 2,0;$	$U_{12} = -1,5;$
21:	$u < 1,5;$	$r_{21} = 3,0;$	$U_{21} = 0,0;$
22:	$u > 1,5;$	$r_{22} = 0,5;$	$U_{22} = 1,25.$

Линеаризованная схема изображена на рис. 2.9, в. Для этой простой цепи можно записать выражения входного тока и выходного напряжения:

$$i = \frac{1}{r_{1k} + r_{2k}} (u - U_{1k} - U_{2k});$$

$$u_2 = \frac{r_{2k}}{r_{1k} + r_{2k}} (u - U_{1k} - U_{2k}) + U_{2k}.$$

Сочетания участков: 11, 21 ($u \leq 0,5$); 12, 21 ($0,5 < u \leq 1,5$); 12, 22 ($u > 1,5$). Для рассматриваемой цепи сразу устанавливаются подходящие линейные участки. По приведенным выражениям для различных амплитуд u вычисляются i и u_2 ; полученные характеристики приведены на рис. 2.9, г.

2.7. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СХЕМ

Метод эквивалентного преобразования практически применим к широко используемым цепям лестничной структуры, составленным последовательным и параллельным соединением двухполюсных ветвей. Суть метода состоит в повторной замене участков с параллельным или последовательным соединением ветвей одной эквивалентной ветвью путем суммирования их токов или напряжений. Речь здесь идет о суммировании ординат или абсцисс заданных характеристик ветвей цепи.

Важное достоинство метода состоит в следующем: 1) не требуется составления уравнений цепи; 2) при графических построениях можно иметь дело с исходными графиками характеристик без их аналитического описания, вносящего погрешность; 3) вид и сложность исходных характеристик не имеют значения, так же как вопрос существования и единственности решения; 4) в процессе преобразования четко выявляется влияние на решение характеристик отдельных элементов. Из данных промежуточных и завершающих построений в процессе эквивалентных преобразований можно получить данные для графиков входной характеристики и любых требуемых передаточных характеристик.

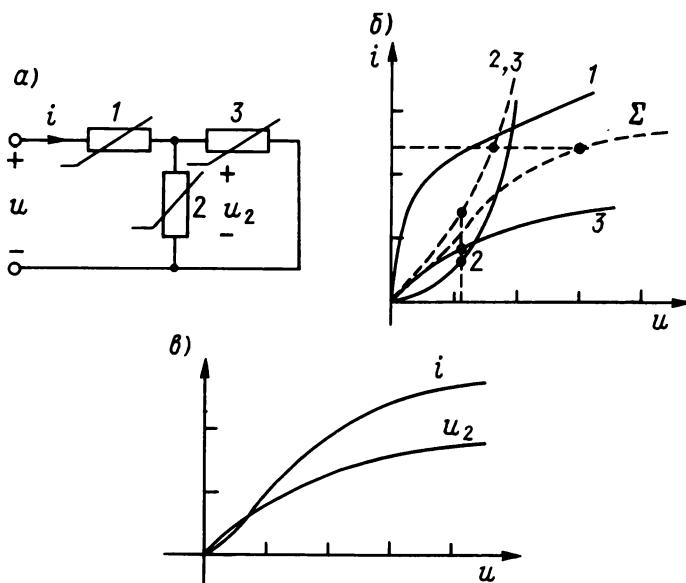


Рис. 2.10

Пример 2.4. На рис. 2.10, *а* показана подключенная к источнику напряжения последовательно-параллельная цепь из трех нелинейных резистивных элементов. Характеристики элементов приведены на рис. 2.10, *б*. Суммирование ординат характеристик элементов 2 и 3, соединенных параллельно, дает эквивалентную характеристику 2–3. Суммируя абсциссы последней с абсциссами кривой i , получаем входную характеристику цепи Σ . Из графиков рис. 2.10, *б* можно, задаваясь напряжением входа, получить как входной ток, так и напряжение u_2 из кривой 2,3. Соответствующие входная и передаточная характеристики приведены на рис. 2.10, *в*.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

3.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Начиная с этой главы, переходим к рассмотрению цепей с различными видами нелинейных элементов: резистивными, индуктивными и емкостными. Поведение таких цепей общего вида, называемых дина-

мическими, описывается системами нелинейных дифференциальных уравнений. Частотные методы — преобразования Лапласа и Фурье — неприменимы к решению нелинейных дифференциальных уравнений. Поэтому следует рассматривать решение во временной области и начинать с составления систем дифференциальных уравнений.

Выясним сначала вопрос о порядке дифференциального уравнения, которым описывается интересующая нас реакция. Порядок уравнения, или порядок сложности цепи, определяется числом индуктивных и емкостных элементов, для которых можно задать произвольные независимые начальные условия в виде начальных зарядов $q(0)$ или напряжений $u_C(0)$ в емкостях и начальных потокоцеплений $\psi(0)$ или токов $i_L(0)$ в индуктивностях. Данное положение следует из того, что решение дифференциального уравнения n -го порядка содержит n произвольных постоянных интегрирования. Для однозначного определения постоянных необходимо иметь n уравнений, которые получаются приравнением решения и $n-1$ производных решения значениям их при $t = 0$. Последние, называемые зависимыми начальными условиями, определяются по независимым начальным условиям и уравнениям цепи при $t = 0$.

Если в цепи имеется так называемый емкостный контур (рис. 3.1, а), составленный только из емкостей и источников напряжения, то сумма напряжений элементов в таком контуре равна нулю, так что начальное напряжение одной из емкостей нельзя задать произвольно: оно

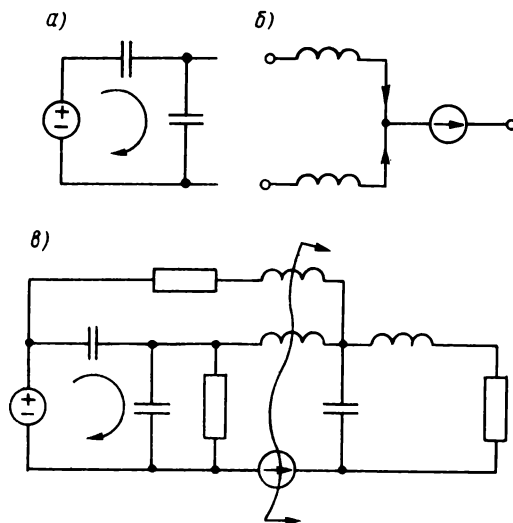


Рис. 3.1

определяется однозначно напряжениями остальных элементов C -контура. Число таких зависимостей будет равно числу n_C^K независимых емкостных контуров.

Аналогично, если в цепи имеется так называемое индуктивное сечение (рис. 3.1, б), составленное только из индуктивных элементов и источников тока, то сумма токов в нем равна нулю, так что невозможно задавать произвольные начальные токи во всех индуктивностях: ток одной из них будет определяться однозначно токами остальных элементов. Число подобных зависимостей равно числу независимых индуктивных сечений n_L^C .

Следовательно, порядок цепи, определяемый числом независимо задаваемых начальных условий, равен числу индуктивных и емкостных элементов за вычетом числа независимых C -контуров и L -сечений:

$$n = n_C + n_L - (n_C^K + n_L^C). \quad (3.1)$$

Для выявления независимых C -контуров следует разомкнуть (удалить) все ветви цепи кроме емкостных ветвей и источников напряжения, а для выявления L -сечений — замкнуть накоротко все ветви кроме индуктивных ветвей и источников тока.

В качестве примера определим порядок цепи, показанной на рис. 3.1, в и содержащей три емкости и три индуктивности, а также резистивные элементы и источники. Для данной относительно простой схемы можно сразу установить, что она содержит один емкостный контур и одно индуктивное сечение, которые отмечены на схеме. Порядок цепи согласно (3.1) $n = 3 + 3 - (1 + 1) = 4$.

Выражение (3.1) дает максимальный порядок, который для некоторых переменных в результате сокращений при определенных численных соотношениях элементов может оказаться меньшим. Наличие в цепи зависимых источников при некоторых включениях как самих источников, так и их управляющих выводов может также приводить к снижению порядка цепи. К сожалению, дать общее простое правило оценки порядка здесь затруднительно, все зависит от конкретной схемы.

Система дифференциальных уравнений, описывающая поведение цепи, зависит от выбора переменных. Для нелинейных динамических цепей наиболее удобными переменными являются напряжения или заряды емкостных и токи или потокосцепления индуктивных ветвей, которые приводят к так называемым уравнениям состояния.

Уравнения состояния представляют собой систему дифференциальных уравнений в нормальной форме (форме Коши), состоящую из уравнений первого порядка, разрешенных относительно первых производных: в левой части уравнений имеем первые производные от каждой переменной, а в правой — функции переменных состояния и приложенных к цепи сигналов. Эта форма уравнений является основной, наиболее эффективной формой описания нелинейных динамиче-

ских цепей, что объясняется следующими обстоятельствами: 1) сведение системы уравнений, записанных относительно узловых напряжений или контурных токов, к одному уравнению для выбранной переменной связано с большими трудностями и не всегда возможно; 2) переменным состояниям можно придать очень полезную геометрическую наглядность, рассматривая их как координатные оси в n -мерном пространстве состояний; решение уравнений состояния будет представляться траекторией изображающей точки в этом пространстве, а проекции этой точки на оси координат будут значениями каждой переменной состояния; 3) алгоритмы численного анализа нелинейных цепей записываются для систем дифференциальных уравнений в нормальной форме; 4) независимые начальные условия задаются, как отмечалось, в виде зарядов (напряжений) емкостей и потокосцеплений (токов) индуктивностей, и поэтому отпадает необходимость в определении зависимых начальных условий.

Следует сразу же отметить, что в общем случае цепей, содержащих нелинейные элементы с идеализированными произвольными немонотонными характеристиками, управляемые источники различных типов, а также емкостные контуры и индуктивные сечения, составление уравнений состояния связано с большими трудностями. В некоторых особых случаях задания характеристик элементов или численных значений параметров может не существовать система уравнений состояния цепи.

Мы рассмотрим уравнения состояния, исключая упомянутые особые случаи, в предположении следующих допущений: 1) в цепи отсутствуют контуры из источников напряжения — независимых и зависимых — и сечения из независимых и зависимых источников тока; 2) в цепи отсутствуют емкостные контуры и индуктивные сечения; 3) характеристики нелинейных элементов заданы однозначными зависимостями (функциями). При указанных допущениях уравнения состояния можно составить на основе излагаемого далее понятия нормального дерева. Более общий подход состоит в выделении линейной резистивной подцепи и привлечении гибридного метода, изложенного в главе 2.

3.2. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Выбор переменных состояния зависит от вида характеристик емкостных и индуктивных элементов. Если заданные характеристики C и L элементов $q(u)$ и $\psi(i)$ немонотонны, а управляются соответственно напряжением и током, то в качестве переменных состояния следует принимать напряжение u_C и ток i_L , так как обращение характеристик приводит к многозначным функциям.

Если же немонотонные характеристики заданы в виде $u(q)$ и $i(\psi)$, т. е. управляются зарядом и потокосцеплением соответственно, то за переменные состояния нужно принимать заряды емкостей и потокосцепления индуктивностей.

В случае же строго монотонных характеристик реактивных элементов за переменные состояния можно принимать как заряды и потокосцепления, так и напряжения емкостей и токи индуктивностей. С точки зрения численных методов решения уравнений состояния предпочтение следует отдавать заряду и потокосцеплению.

Как и любая система уравнений, описывающая поведение цепи, уравнения состояния с выбранными переменными — зарядами или напряжениями емкостей и потокосцеплениями или токами индуктивностей — составляются на основе: 1) уравнений элементов и 2) уравнений соединений (топологических уравнений).

Уравнения элементов. Характеристики нелинейных элементов могут быть заданы в виде аналитических функций следующих видов:

$$\begin{aligned} u_R &= f_R(u_R); \quad u_R = f_R^{-1}(i_R); \\ q &= f_C(u_C); \quad u_C = f_C^{-1}(q); \\ \psi &= f_L(i_L); \quad i_L = f_L^{-1}(\psi). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнения соединений. Для получения уравнений состояния с переменными — напряжениями (зарядами) емкостей и токами (потокосцеплениями) индуктивностей — запись топологических уравнений цепи производят на основе следующего алгоритма:

1. Составляют так называемое нормальное дерево, ветвями которого являются источники напряжения и емкостные ветви, а также резистивные ветви, характеристики которых управляются напряжениями. Хордами должны быть индуктивные ветви и источники тока, а также остальные, не вошедшие в дерево резистивные ветви.

2. Для каждой ветви дерева намечают главное сечение и, применяя закон токов Кирхгофа к каждому главному сечению, выражают токи всех ветвей дерева через токи хорд. Число таких уравнений будет равно числу главных сечений, т. е. числу ветвей дерева $n_{в.д} = n_y - 1$ (n_y — число узлов). Основными из них являются уравнения для токов емкостных ветвей.

3. Для каждой хорды намечают главный контур и для каждого главного контура по закону напряжений Кирхгофа записывают напряжения ветвей дерева. Число таких уравнений будет равно числу главных контуров, т. е. числу хорд $n_x = n_b - n_y + 1$ (n_b — число всех ветвей). Основными из них являются уравнения для напряжений индуктивных ветвей.

4. Приняв в качестве исходных выражения для токов емкостных ветвей дерева и для напряжений индуктивных хорд, с помощью уравнений остальных элементов исключают из них токи и напряжения всех

резистивных ветвей. В результате получим систему уравнений состояния — систему n дифференциальных уравнений первого порядка в форме Коши: в левой части имеем производные первого порядка от переменных состояния, а в правой части — функции переменных состояния и напряжений и токов источников.

Пример 3.1. Составим уравнение состояния цепи, изображенной на рис. 3.2, а, состоящей из нелинейных элементов со следующими характеристиками:

$$\text{а) } i_1 = f_1(u_1); \quad \text{в) } u_C = f_C^{-1}(q); \quad (3.3)$$

$$\text{б) } u_2 = f_2(i_2); \quad \text{г) } i_L = f_L^{-1}(\psi)$$

и подключенной к источнику тока и источнику напряжения.

На рис. 3.2, б показано выбранное нормальное дерево с ветвями C , u_0 и R_2 и хордами L , i_0 и R_1 . Применяя ЗТК к главным сечениям, имеем

$$\begin{aligned} i_C &= i_L + i_1 + i_0; \\ i_2 &= i_L + i_0; \\ i_{u_0} &= -i_L - i_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Применение закона напряжений Кирхгофа к трем главным контурам дает

$$\begin{aligned} u_L &= -u_C - u_2 + u_0; \\ u_1 &= -u_C + u_0; \\ u_{i_0} &= -u_C - u_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Основными уравнениями являются первые уравнения: для тока емкости и напряжения индуктивности. Из этих уравнений необходимо исключить токи и напряжения резистивных элементов, используя остальные уравнения и уравнения элементов. С помощью (3.3а) в первом уравнении (3.4) выражаем i_1 через u_1 , которое затем исключаем, используя второе уравнение (3.5). После замены напряжения емкости в левой части выражением (3.3в) получим

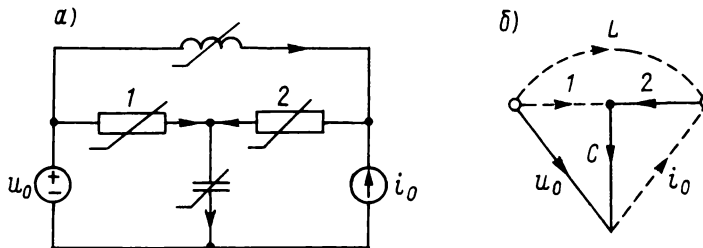


Рис. 3.2

$$i_C = f_1(-u_C + u_0) + i_L + i_0 = f_1[-f_C^{-1}(q) + u_0] + i_L + i_0.$$

С помощью (3.3б) заменяем в первом уравнении (3.5) напряжение u_2 на ток i_2 , который затем исключаем, используя второе уравнение (3.4). Замена тока индуктивности согласно (3.3г) дает

$$u_L = -u_C + f_2(-i_L + i_0) + u_0 = -u_C - f_2[f_L^{-1}(\psi) + i_0] + u_0.$$

Теперь остается выразить переменные i_C и u_L через производные заряда и потокосцепления, а также u_C и i_L согласно (3.3в, г) и записать уравнения состояния цепи

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= f_1[-f_C^{-1}(q) + u_0] + f_L^{-1}(\psi) = F_1(q_1, \psi, u_0, i_0); \\ \frac{d\psi}{dt} &= -f_C^{-1}(q) + f_2[f_L^{-1}(\psi) + i_0] + u_0 = F_2(q, \psi, u_0, i_0). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Наиболее трудоемкой частью, особенно в более сложных цепях, является исключение из уравнений соединений вида (3.4) и (3.5) токов и напряжений резистивных ветвей: их необходимо выразить через переменные состояния и источников, используя как вспомогательные уравнения соединений, так и уравнения элементов.

Если из решения уравнений (3.6) найдены переменные состояния (заряд емкости и потокосцепление индуктивности), то из уравнений соединений и элементов можно найти все остальные реакции; в частности, имеем:

$$\begin{aligned} u_1 &= -f_C^{-1}(q) + u_0; \\ i_2 &= -f_L^{-1}(\psi) + i_0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В случае цепи n -го порядка получим систему n уравнений, которую можно записать в следующей матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{e}), \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T; \\ \mathbf{e} &= [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_m]^T; \\ \mathbf{f} &= [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_n]^T \end{aligned}$$

являются векторами переменных состояния, воздействия и функций. Точка над переменной есть знак производной: $\dot{x} = dx/dt$.

Интересующие нас реакции резистивных ветвей можно выразить через переменные состояния с помощью соотношений вида (3.7). Введя вектор указанных реакций

$$y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_\nu]^T,$$

можно его записать в следующей матричной форме:

$$y = g(x, e), \quad (3.9)$$

где $g = [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_\nu]^T$ — вектор функций.

Принятое выделение выбранных переменных состояния соответствует разбиению цепи на подцепь из реактивных элементов и подцепь из резистивных элементов и источников (рис. 3.3, а). Как видно из рисунка, токи емкостей и напряжения индуктивностей, равные производным переменных состояния q' и ψ' , представляют собой с противоположным знаком входные токи и входные напряжения выводов резистивной подцепи, присоединенных соответственно к емкостям и индуктивностям.

Если переменные состояния найдены, то по теореме замещения емкости можно заменить источниками напряжения с напряжениями u_{Cj} , а индуктивности — источниками тока с токами i_{Lk} (рис. 3.3, б). Из этой схемы следует, что задача определения реакций резистивных ветвей свелась к анализу нелинейной цепи, рассмотренной в главе 2.

Отметим два момента:

1. Выбор переменных состояния не является единственным. В частности, если задано уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = F(\dot{x}, x, e),$$

то, положив $x = x_1$; $x_2 = \dot{x}_1$, получим уравнения состояния нормальной формы, широко применяемые на практике:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= F(x_1, x_2, e). \end{aligned} \quad (3.10)$$

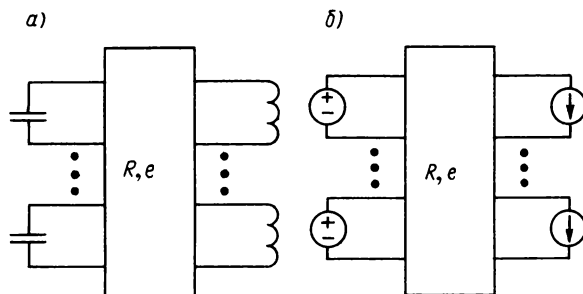


Рис. 3.3

Подобным же образом можно записать n уравнений состояния для уравнения n -го порядка.

2. Если цепь содержит емкостные контуры и индуктивные сечения, то в правой части уравнений состояния появляются первые производные воздействий.

В заключение приведем уравнения часто применяемых на практике простых цепей второго порядка, они понадобятся нам в следующих главах. Для описания указанных цепей используют как уравнения состояния, так и уравнения второго порядка, записанные для одной из переменных. Здесь уравнения можно записать без построения нормального дерева.

Нелинейный колебательный контур. Для подключенного к источнику напряжения u_0 последовательного контура, выбрав в качестве переменных потокосцепление и заряд индуктивного и емкостного элементов, можно сразу по его схеме на основе уравнений соединений

$$i_C = i_L = i_R = i; \quad u_L = -u_C - u_R + u_0$$

записать уравнения состояния

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= f_L^{-1}(\psi); \\ \frac{d\psi}{dt} &= -f_R[f_L^{-1}(\psi)] - f_C^{-1}(q) + u_0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Рассмотрим частные случаи:

1. Контур без потерь: $f_R(i) = 0$. Уравнения состояния

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= f_L^{-1}(\psi); \\ \frac{d\psi}{dt} &= -f_C(q) + u_0. \end{aligned}$$

Исключение потокосцепления при $u_0 = 0$ дает уравнение второго порядка для заряда

$$\frac{df_L(i)}{di} \frac{d^2q}{dt^2} + f_C^{-1}(q) = 0. \tag{3.12}$$

2. Резистивный и индуктивный элементы — линейные, а емкостный — нелинейный. Уравнения состояния согласно (3.11)

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\psi}{L} ;$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{R\psi}{L} - f_C^{-1}(q) + u_0.$$

Уравнение второго порядка для заряда

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L} f_C^{-1}(q) = \frac{1}{L} u_0.$$

Если характеристика емкостного элемента выражена нечетным кубическим полиномом

$$u_C = f_C^{-1}(q) = b_1 q + b_3 q^3,$$

то получим уравнение Дуффинга

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{b_1}{L} q + \frac{b_3}{L} q^3 = \frac{1}{L} u_0. \quad (3.13)$$

3. Реактивные элементы линейны, резистивный элемент — нелинейный. Из (3.11) получаем

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\psi}{L} ;$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -f_R(\psi/L) - \frac{q}{C} + u_0.$$

Получим уравнение второго порядка для тока в контуре. Из равенства нулю суммы напряжений в контуре имеем

$$L \frac{di}{dt} + f_R(i) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = u_0.$$

Дифференцирование уравнения дает

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{L} \frac{df_R}{di} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = u_0', \quad (3.14)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

В случае представления характеристики нечетным полиномом

$$u_R = f_R(i) = -\beta_1 i + \beta_3 i^3; \quad \frac{df_R}{di} = -\beta_1 + 3\beta_3 i^2.$$

Уравнение для тока при отсутствии внешнего воздействия

$$\frac{d^2 i}{d\tau^2} - \frac{\beta_1}{\rho} \left(1 - \frac{3\beta_3 i^2}{\beta_1} \right) \frac{di}{d\tau} + i =$$

$$= \frac{d^2 i}{d\tau^2} - \mu(1 - bi^2) \frac{di}{d\tau} + i = 0,$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$; $\tau = \omega_0 t$ — нормированное время; $\mu = \beta_1/\rho$; $b = 3\beta_3/\beta_1$.

Введя нормированное значение тока

$$x = i \sqrt{b}; \quad i = x/\sqrt{b},$$

получаем уравнение Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0. \quad (3.15)$$

Уравнение цепи туннельного диода со смещением. На рис. 3.4 показана схема замещения туннельного диода со смещением. Туннельный диод представляет собой нелинейный двухполюсный резистивный элемент с одним падающим участком характеристики типа N, управляемый напряжением; к нему присоединены: последовательно с сопротивлением — индуктивность, параллельно диоду — паразитная емкость. Применяя закон токов к узлу *a* и закон напряжений — к контуру с индуктивностью, сразу получаем

$$i_C = \frac{dq}{dt} = -i_d(q/C) - \psi/L;$$

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = -\frac{q}{C} - \frac{\psi R}{L} + u_0. \quad (3.16)$$

Уравнение лампового генератора синусоидальных колебаний. Составим уравнения генератора синусоидальных колебаний на триоде, схема которого для переменной составляющей сигнала показана на рис. 3.5, а

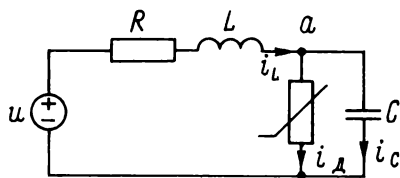


Рис. 3.4

Основными частями схемы являются: 1) нелинейный трехполюсный элемент — триод с общим выводом (катодом), входным и выходным выводами (сеткой и анодом); 2) параллельный колебательный контур в анодной цепи из емкостного элемента *C* и индуктивного элемента *L* с последовательно соединенным сопротивлением, учитывающим поте-

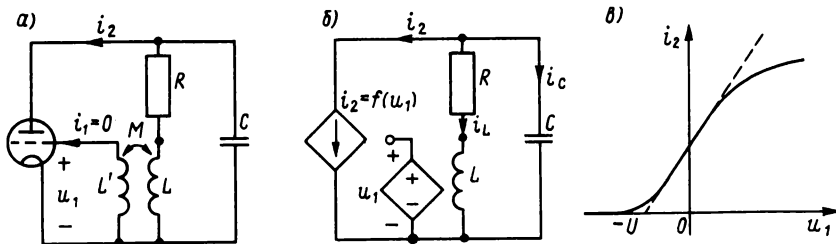


Рис. 3.5

ри; 3) трансформаторная цепь обратной связи в виде взаимной индуктивности M , связывающей катушку колебательного контура с сеткой триода. Будем пренебрегать током сетки триода. На рис. 3.5, б показана схема замещения генератора, на которой индуктивная связь учтена зависимым источником ИНУТ в цепи сетки с напряжением $u_1 = -pMi_L$, а триод — зависимым источником тока с током $i_2 = f(u_1)$, управляемым напряжением сетки. Ток этого источника (ток анода i_2) управляется нелинейной функцией, представляющей собой анодно-сеточную характеристику триода. Вид этой характеристики при пренебрежении влиянием анодного напряжения показан на рис. 3.5, в.

Запишем уравнения равновесия токов в верхнем узле и равновесия напряжений в колебательном контуре ($p = d/dt$):

$$pCu_C + i_L + i_2 = pCu_C + i_L + f(u_1) = 0;$$

$$pLi_L - u_C + Ri_L = 0.$$

Исключив из этих выражений u_C и заменив ток в индуктивности $i_L = -u_1/(pM)$, получим уравнение для напряжения сетки $(LCp^2 + pRC + 1)u_1 - pMf(u_1) = 0$.

После замены оператора дифференцирования имеем

$$LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + [RC - Mf(u_1)] \frac{du_1}{dt} + u_1 = 0.$$

Перепишем уравнение, введя нормированное время $\tau = \omega_0 t = t/\sqrt{LC}$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота колебательного контура:

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + \omega_0 [RC - Mf'_u(u_1)] \frac{du_1}{d\tau} + u_1 = 0. \quad (3.17)$$

Окончательный вид уравнения будет зависеть от приближенного аналитического представления анодно-сеточной характеристики. Применяют аппроксимацию полиномом n -й степени или кусочно-линейное представление.

Если применить представление характеристики с помощью полинома третьего порядка

$$i_2 = f(u_1) = a + Su_1 - S_1 u_1^3 \quad (S, S_1 > 0),$$

то производная $f'(u_1) = S - 3S_1 u_1^2$. Здесь параметр S_1 определяет степень нелинейности характеристики.

Уравнение для напряжения сетки в этом случае

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + \omega_0(RC - MS + 3MS_1 u_1^2) \frac{du_1}{d\tau} + u_1 = 0. \quad (3.18)$$

Обозначим

$$\mu = \omega_0(MS - RC); \quad b = 3MS_1 \omega_0 / \mu \quad (3.18a)$$

и перепишем уравнение

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} - \mu(1 - bu^2) \frac{du_1}{d\tau} + u_1 = 0.$$

Умножив уравнение на \sqrt{b} , произведем нормирование амплитуды напряжения:

$$\sqrt{b}u = x; \quad x = u / \sqrt{b}.$$

В результате получим нормированное уравнение для напряжения сетки лампового генератора (уравнение Ван-дер-Поля)

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0. \quad (3.19)$$

Здесь μ — коэффициент перед нелинейным множителем — зависит от разности между произведением крутизны S лампы на линейном участке характеристики и взаимной индуктивности, осуществляющей обратную связь, и значением RC .

3.3. О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

В предыдущем параграфе показано, что для анализа нелинейных цепей необходимо решить систему нелинейных уравнений состояния $\dot{x} = f(x, t)$.

$$(3.20)$$

Время в правой части обусловлено воздействием внешнего источника переменного сигнала. Такие уравнения, а также сами цепи, находящиеся под воздействием переменных сигналов, называют неавтономными.

Уравнения, не содержащие в явном виде времени,

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.21)$$

а также сами цепи без источников переменного сигнала называют автономными. Источники постоянного сигнала могут входить в автономные цепи.

Методов точного аналитического решения дифференциальных уравнений, даже простейших уравнений первого порядка не существует.

Основным методом решения является численный метод интегрирования систем дифференциальных уравнений с применением вычислительных машин. Метод требует численного задания параметров и характеристик всех элементов цепи. Результаты численного анализа дают очень много для суждения о реакциях конкретной цепи. Но получить общую картину процессов, выявить влияние некоторых параметров и характеристик на вид реакций, установить возможность особых явлений, присущих нелинейным объектам, с помощью численных методов затруднительно.

Численным методам посвящена обширная литература [38], и мы не будем приводить изложение существующих различных алгоритмов численного анализа. Приведем лишь один из простейших алгоритмов — неявный алгоритм Эйлера для того, чтобы изложить суть анализа динамических цепей по дискретным моделям емкостных и индуктивных элементов. Алгоритм Эйлера, как и любой другой алгоритм численного решения дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x, t)$, основан на разбиении времени на равные малые интервалы $\Delta t = h$ и последовательном вычислении значений решения на каждом интервале или шаге. В неявном алгоритме Эйлера используется приближенное представление производной на $(k+1)$ -м шаге:

$$\dot{x} = (x_{k+1} - x_k)/h = f(x_{k+1}, t_{k+1});$$

отсюда

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1}, t_{k+1}). \quad (3.22)$$

Применение этого алгоритма к уравнениям реактивных элементов позволяет получить их дискретные модели.

Уравнение емкостного элемента $\dot{u} = i/C(u)$, где $C(u) = dq(u)/du$ — динамическая емкость.

Для дискретного момента $t = t_{k+1}$ его можно записать в виде разностного уравнения

$$u_{k+1} = u_k + hi_{k+1}/C(u_{k+1});$$

отсюда

$$i_{k+1} = \frac{C(u_{k+1})}{h} (u_{k+1} - u_k) = g_{k+1}(u_{k+1}), \quad (3.23)$$

где $g_{k+1} = C(u_{k+1}) \frac{1}{h} (1 - u_k/u_{k+1})$ — эквивалентная нелинейная проводимость на $(k+1)$ -м шаге, зависящая от напряжения на этом же шаге.

Как следует из (3.23), нелинейная емкость при численном анализе на каждом шаге может быть представлена как нелинейный резистивный элемент с проводимостью g_{k+1} . На рис. 3.6, а изображена схема замещения емкостного элемента на $(k+1)$ -м шаге, состоящая из нелинейной проводимости g_{k+1} .

Уравнение индуктивного элемента

$$\frac{di}{dt} = \frac{u}{L(i)},$$

где $L(i)$ — динамическая индуктивность. Для дискретного момента $t = t_{k+1}$ его можно согласно (3.22) записать в виде разностного уравнения

$$i_{k+1} = i_k + h u_{k+1} / L(i_{k+1});$$

отсюда

$$u_{k+1} = L(i_{k+1}) \frac{1}{h} (i_{k+1} - i_k) = r_{k+1} i_{k+1}, \quad (3.24)$$

где $r_{k+1} = L(i_{k+1}) \frac{1}{h} (1 - i_k/i_{k+1})$ — эквивалентное нелинейное сопротивление на $(k+1)$ -м шаге, зависящее от тока.

Из (3.24) видно, что нелинейную индуктивность при численном анализе можно представлять на каждом шаге нелинейным резистивным элементом с сопротивлением r_{k+1} . На рис. 3.6, б приведена схема замещения индуктивного элемента на $(k+1)$ -м шаге, состоящая из нелинейного сопротивления r_{k+1} .

Приведенные дискретные модели реактивных элементов получены с помощью простейшего неявного алгоритма Эйлера. Можно по-

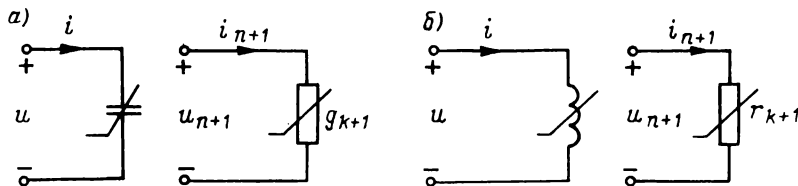


Рис. 3.6

лучить более точные модели элементов, если применять неявные алгоритмы высокого порядка — трапецидальный или Гира [38].

При численном анализе цепи каждый реактивный элемент заменяется приведенными схемами. В результате получается нелинейная резистивная дискретная модель динамической цепи. Вычисления должны проводиться последовательно от шага к шагу; при этом на каждом шаге необходимо проводить анализ нелинейной резистивной цепи с использованием рассмотренного в главе 2 алгоритма Ньютона–Рафсона и основанных на нем линеаризованных дискретных моделей. Дискретные модели позволяют избежать трудоемкой процедуры составления уравнений состояния сложных динамических цепей.

Наряду с количественным анализом большое значение имеют качественные методы исследования нелинейных цепей. Качественный анализ должен без решения уравнений установить наиболее важные свойства цепи и явления в ней, а также влияние на них характеристик отдельных элементов. Особый интерес представляют условия возникновения колебаний, скачков токов и напряжений, влияние начальных условий на характер процессов и т. д.

Качественное исследование применяется в основном для автономных цепей и систем — без внешнего переменного сигнала. При этом важную роль играют состояния, или точки, равновесия, представляющие собой те значения переменных, при которых все производные уравнений состояния обращаются в нуль $dx_i/dt = 0$. Следовательно, точки равновесия являются корнями системы функциональных уравнений, получающихся приравниванием нулю правых частей уравнений состояния:

$$f(x) = 0. \quad (3.25)$$

Равенству производных нулю соответствует разрыв емкостей и короткое замыкание индуктивностей, так что постоянные напряжения на выводах разомкнутых емкостей и постоянные токи короткозамкнутых выводов индуктивностей и являются состояниями равновесия. Последние представляют, таким образом, конечные или установившиеся значения переменных состояния автономной цепи при $t \rightarrow \infty$.

3.4. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Процессы в автономных цепях первого порядка, описываемых уравнением $\dot{x} = f(x)$, можно достаточно полно исследовать на основе качественного анализа по виду правой части уравнений $f(x)$, не прибегая к количественному решению. Качественный анализ позволяет выявить наиболее важные свойства процессов в цепи, такие как: параметры установившихся состояний при любых начальных условиях,

возможность появления незатухающих колебаний, максимальные токи и напряжения элементов и т. п.

Правая часть $f(x)$ уравнения состояния цепи первого порядка с одним запасующим энергию элементом — емкостью или индуктивностью — имеет смысл входной переменной резистивной подцепи со стороны выводов реактивного элемента. Если последний является емкостью с напряжением $u_C = x$, представляющим собой переменную состояния, то ее ток $i_C = Cu'_C = -i_{вх} = Cf(u_C)$; правая часть уравнения $f(x) = f(u_C)$ пропорциональна входному току, т. е. входной характеристике $i(u)$ резистивной подцепи с обратным знаком. Если реактивный элемент является индуктивностью с током $i_L = x$ в качестве переменной состояния, то ее напряжение $u_L = Li'_L = -u_{вх} = Lf(i_L)$; правая часть уравнения $f(x) = f(i_L)$ пропорциональна входному напряжению, т. е. входной характеристике $u(i)$ резистивной подцепи с переменной знака.

Качественное исследование проводится по графику правой части $f(x)$ уравнения состояния, т. е. обращенной по знаку входной характеристике резистивной подцепи, построенной в зависимости от переменной состояния x . Заключение о характере решения, или, как говорят, движения изображающей точки на графике, можно делать: 1) по числу и виду точек равновесия, в которых $f(x) = 0$, т. е. точек пересечения графиком оси x ; 2) по знаку $f(x) = dx/dt$: при $f(x) > 0$ (верхняя полуплоскость) — движение точки слева направо; при $f(x) < 0$ (нижняя полуплоскость) — движение справа налево; 3) по условию непрерывности заряда (напряжения) на емкости и потокосцепления (тока) в индуктивности, представляющих собой переменные состояния.

Приведенные соображения позволяют легко установить устойчивость или неустойчивость особых точек, а также указать характер изменения переменных состояния при любых начальных условиях.

Наибольший интерес представляют процессы в цепях первого порядка, у которых входная характеристика резистивной подцепи, т. е. функция $f(x)$, имеет немонотонный вид.

Рассмотрим сначала случай, когда немонотонная вольт-амперная характеристика резистивной подцепи является однозначной функцией переменной состояния: управляется напряжением, если цепь содержит емкость, и током, если цепь содержит индуктивность. Подобную цепь можно получить, например, присоединяя параллельно к емкости туннельный диод со смещением.

Будем далее для общности полагать, что немонотонная характеристика резистивной подцепи имеет несколько спадающих участков и соответственно этому несколько состояний равновесия — точек, в которых скорость изменения переменной состояния равна нулю.

На рис. 3.7, а показан график правой части $f(x)$ с четырьмя точками равновесия λ_i . На основе приведенных выше соображений легко установить устойчивость или неустойчивость особых точек. Точки λ_1

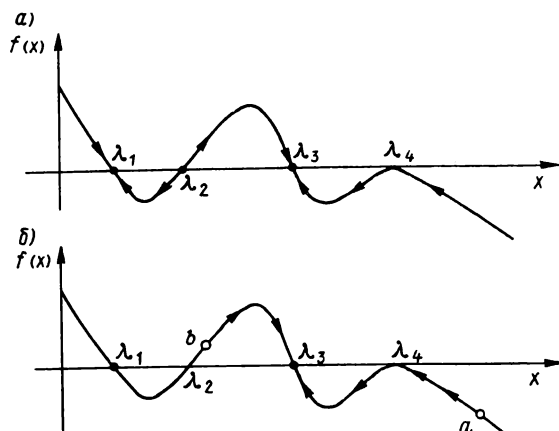


Рис. 3.7

и λ_3 , лежащие на участке графика $f(x)$ с отрицательным наклоном, являются устойчивыми: справа от этих точек $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$, т. е. изображающая точка будет перемещаться влево к точке равновесия; слева $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, т. е. получим перемещение вправо к точке равновесия. В точке λ_2 , лежащей на участке с положительным наклоном, получим обратную картину: изображающая точка как слева, так и справа будет направлена от точки равновесия, т. е. она неустойчива. В точке λ_4 график касается оси x снизу: наклон (производная) изменяет свой знак. При $x > \lambda_4$ получим движение влево к точке λ_4 , но слева от нее — также влево, от точки равновесия, так что последняя должна быть отнесена к неустойчивой. Аналогичная картина, но с движением изображающей точки слева направо получится, если график касается оси x сверху.

Если обобщенная однозначная входная характеристика резистивной подцепи имеет несколько особых точек, как на рис. 3.7, а, то устойчивые и неустойчивые точки чередуются. После установления вида особых точек на основе приведенных простых соображений нетрудно указать направление движения изображающей точки на графике $f(x)$ для любого начального значения переменной состояния и тем самым выявить возможные решения уравнения. Если начальное значение переменной равно $x_a(0) > \lambda_3$ (рис. 3.7, б), то изображающая точка из начального положения a будет двигаться влево через λ_4 до устойчивой точки равновесия λ_3 . К этой же точке будет направлено движение, если $\lambda_2 < x(0) < \lambda_3$ (точка b). При $x(0) < \lambda_2$ изображающая точка будет перемещаться до второй устойчивой особой точки λ_1 .

Изложенное показывает, что в нелинейной цепи первого порядка с однозначной входной характеристикой резистивной подцепи: 1) в за-

висимости от начального условия возможны различные режимы с различными установившимися реакциями, определяемые устойчивыми точками равновесия; 2) переход от начальной точки к установившейся совершается монотонным образом с непрерывным убыванием или нарастанием переменной состояния.

Перейдем теперь к случаю, когда немонотонная входная характеристика резистивной подцепы является многозначной функцией переменной состояния: управляется током, если цепь содержит емкость, и напряжением, если цепь содержит индуктивность. Подобную цепь можно получить, например, включая последовательно с индуктивностью туннельный диод со смещением.

Будем рассматривать типичную для ряда практических схем многозначную характеристику, состоящую из трех монотонных участков или ветвей (рис. 3.8, а): нижней, средней и верхней. С помощью источников смещения можно перемещать характеристику в вертикальном направлении, так что единственная точка равновесия (точка пересечения с осью x) может оказаться на любой из ветвей.

На основе установленного выше правила точки равновесия на нижней и верхней ветвях с отрицательным наклоном будут устойчивыми, а точка равновесия на средней ветви с положительным наклоном — неустойчивой.

На какой из ветвей характеристики будет располагаться изображающая решение (рабочая) точка, зависит от начального условия — значения переменной состояния $x(0)$, т. е. от $u_C(0)$ или $i_L(0)$. Перемещение точки при $t > 0$ происходит по той же начальной ветви, на которой она оказалась: пока изображающая точка не достигла конца исходной ветви, переход на другие ветви исключается. Соответственно этому в каждый момент времени в правой части уравнения состояния будем иметь вполне определенную одну ветвь характеристики

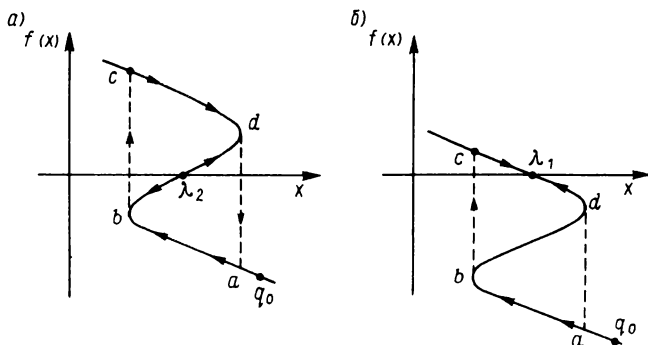


Рис. 3.8

$f_i(x)$. Приняв это положение, на основе ранее отмеченных общих соображений можем наметить направления перемещения изображающей точки по характеристике.

Пусть характеристика имеет неустойчивую точку равновесия λ_2 (рис. 3.8 *a*). Если q_0 — начальное положение точки на нижней ветви, то перемещение возможно только влево ($x' < 0$) до точки b ; здесь движение вправо по средней ветви исключено, так как производная остается отрицательной. Единственный путь — переход на верхнюю ветвь в точку c по вертикальной линии в силу непрерывности переменной состояния; при этом входная переменная, пропорциональная производной, получит скачкообразное изменение. По верхней ветви движение возможно только вправо; в точке d из-за невозможности попадания на среднюю ветвь получим переход скачком на нижнюю ветвь и далее — повторение циклов движения по пути abc . Легко убедиться в том, что, где бы ни оказалась начальная точка, в конечном счете, получим движение по указанному замкнутому пути. При этом переменная состояния и ее производная будут периодическими функциями времени с резкими скачкообразными изменениями.

Таким образом, в автономной нелинейной цепи с одним запасающим энергией элементом возможны незатухающие колебания, называемые автоколебаниями, которые находят очень широкое применение.

При расположении точки равновесия на нижней или верхней ветви аналогичным образом получим направления движения, показанные на рис. 3.8, *б*. Здесь происходит один скачкообразный переход и процесс заканчивается в устойчивой точке равновесия, колебаний не будет.

Отметим, что и в простейших автономных нелинейных цепях первого порядка проявляются особые явления, присущие вообще нелинейным цепям: существование нескольких установившихся режимов; сильное влияние начальных условий на характер процессов; скачки токов и напряжений; установление автоколебаний.

Качественное исследование процессов в автономных цепях второго порядка существенно усложняется. Оно проводится с помощью метода фазовой плоскости, который рассматривается в следующей главе.

В заключение остановимся на вопросе о противоречивых и тупиковых состояниях, которые могут возникнуть в нелинейных электрических цепях из-за некорректности применяемых моделей устройств. Примерами простейших некорректных моделей могут служить рассмотренные выше цепи первого порядка в том случае, когда правая часть уравнения представляет собой многозначную функцию независимой переменной. В этом случае, как отмечалось в § 3.1, уравнение не является собственно уравнением состояния. Противоречивость состояния здесь в следующем: изображающая или рабочая точка должна всегда располагаться на характеристике, но в крайних точках (b и d на рис. 3.8, *a*) движение по характеристике оказывается невозможным. Поэтому приходится принимать быстрый скачкообразный переход

по линии вне характеристики от точки b к точке c и от точки d к точке a , так что рабочая точка не в каждый момент времени лежит на характеристике. При этом оценить длительность скачка затруднительно.

В некоторых случаях можно скорректировать модель, включая в схему малые параметры. Так, цепь из индуктивности, подключаемой к резистивному элементу с падающим участком характеристики, является некорректной и противоречивой, приводящей к скачкам. Но если параллельно резистору присоединить емкость, то получаются два уравнения состояния с однозначными характеристиками и единственным решением.

Другой путь устранения противоречивых состояний заключается в коррекции модели с помощью элементов высшего порядка. Покажем это на примере параллельного соединения линейного сопротивления и нелинейной емкости (рис. 3.9, *a*). Характеристика нелинейной емкости представлена здесь нечетным полиномом третьей степени (рис. 3.9, *б*)

$$q = a_3 u^3 - a_1 u. \quad (3.26)$$

Уравнение цепи

$$\frac{dq}{dt} = \frac{-u_C(q)}{R}. \quad (3.27)$$

Это уравнение не является уравнением состояния, так как функция $u_C(q)$ неоднозначна. Из (3.27) следует

$$i_C = \frac{dq}{dt} > 0; \quad u_C < 0;$$

$$i_C = \frac{dq}{dt} < 0; \quad u_C > 0.$$

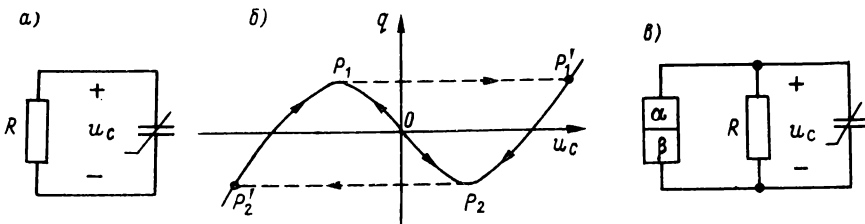


Рис. 3.9

Точка $P(0, 0)$ неустойчива. Соответственно этому рабочая точка перемещается по спадающему участку в направлении стрелок и стремится к точке P_1 или P_2 . Здесь

$$u_C = \pm U_0 = \text{const}; \quad q = \pm Q_0 = \text{const}.$$

Эти соотношения противоречат уравнению (3.27), которое при $u_C = U_0$ дает $q = K_1 t + K_2$. Допущение бесконечно быстрых скачков, показанных на рис. 3.9, б, имеет тот недостаток, что движение рабочей точки не всегда происходит по характеристике.

На рис. 3.9, в показана корректная модель, содержащая параллельно присоединенный линейный элемент высшего порядка $k = \alpha - \beta = -2$ с $\alpha = -2, \beta = 0$, ток которого

$$i_k = K \frac{d^2 u_k}{dt^2}. \quad (3.28)$$

С учетом тока емкостного элемента с характеристикой (3.26)

$$i_C = \frac{dq}{dt} = (3a_3 u^2 - a_1) \frac{du}{dt}$$

получаем уравнение для напряжения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{a_1}{K} \left(1 - \frac{3a_3}{a_1} u^2 \right) \frac{du}{dt} + \frac{u}{K} = 0.$$

Если ввести обозначения коэффициентов, то придем к уравнению второго порядка Ван-дер-Поля. Применение элемента высшего порядка позволило устранить противоречивое состояние.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

МЕТОД ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

4.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Ввиду невозможности аналитического решения уравнений состояния нелинейных цепей, как отмечалось, основными методами анализа являются численные методы с использованием ЭВМ. Применение численных методов возможно при численном задании параметров и характеристик всех элементов, а также значений всех начальных условий

и приложенных к цепи сигналов. Вычисления дают решения для вполне определенного конкретного случая. Изменение любого параметра цепи и сигнала или начальных условий требует новых расчетов.

Но часто требуется знать общие свойства решений уравнений исследуемых или проектируемых систем и возможность таких явлений, как автоколебания, скачки при изменении параметров и начальных условий в широких пределах.

Выявить наиболее важные характеристики и свойства нелинейных систем без аналитического и численного решения можно с помощью качественного исследования. Основной метод качественного анализа состоит в построении фазовых траекторий в n -мерном пространстве состояний. Координатными осями этого пространства являются переменные состояния. Значения решений для каждого момента времени t_k определяют точку в пространстве состояний. Соединяя последовательность этих точек, получим кривую, направленную в сторону возрастания времени и называемую фазовой траекторией. Проекция каждой точки траектории на оси координат определяют значения соответствующих переменных состояния.

Перемещение точки, называемой изображающей, по траектории от начальной точки, соответствующей начальным условиям при $t = 0$, до конечной при $t = \infty$ будет определять решения для всех переменных состояния; имеется, следовательно, однозначное соответствие между решениями и траекторией. Метод фазовых траекторий применяется в основном для автономных цепей — без внешнего переменного сигнала. Наиболее широко он используется для качественного исследования автономных систем второго порядка с траекториями на фазовой плоскости. При переходе к системам более высокого порядка резко возрастают трудности исследования. Поэтому в дальнейшем основное внимание уделяется изложению траекторий, классификации и качественному их разбиению применительно к фазовой плоскости.

Остановимся здесь на понятии устойчивости, имеющем фундаментальное значение при исследованиях цепей и систем. Приведем определение устойчивости состояния равновесия по Ляпунову: состояние равновесия x^* системы устойчиво, если для любой величины $\epsilon > 0$ существует другая малая величина $\delta > 0$ (зависящая только от ϵ), такая, что начальное отклонение состояния на величину $|x(t_0) - x^*| < \delta$ приводит к тому, что для всех моментов $t > t_0$ отклонение состояния $|x(t, t_0) - x^*|$ остается меньше ϵ .

Понятие асимптотической устойчивости формулируется следующим образом: состояние равновесия асимптотически устойчиво, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, существует положительное число δ_a , такое, что при любом начальном отклонении $|x(t_0) - x^*| < \delta_a$ переменная сходится к x^* при $t \rightarrow \infty$.

Приведем формулировку понятия устойчивости периодических режимов по Ляпунову. Периодическое решение $x = x^*(t)$ устойчиво,

если для любой малой величины $\epsilon > 0$ существует такое $\delta(\epsilon)$, что для всякого другого решения $x(t)$, для которого $|x(t_0) - x^*(t_0)| < \delta$, при $t > t_0$ выполняется условие $|x(t) - x^*(t)| < \epsilon$.

Вводят также понятие орбитной устойчивости применительно к замкнутой фазовой траектории, которая представляет периодическое решение. Периодическое решение $x = x^*(t)$ орбитно устойчиво, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta(\epsilon) > 0$, что для всякого другого решения $x = x(t)$, для которого $|x(t_0) - x^*(t_0)| < \delta$, выполняется условие $|x(t) - x^*(t)| < \epsilon$ для всех $t > t_0$. Требование орбитной устойчивости слабее требования устойчивости по Ляпунову для периодического решения. Для состояния равновесия требования обоих видов устойчивости совпадают.

4.2. ПОНЯТИЯ ТРАЕКТОРИИ И ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Метод плоскости состояния, или фазовой плоскости, применяется для исследования процессов в автономных системах второго порядка, описываемых двумя уравнениями состояния:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2); \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Время, являющееся независимой переменной, не должно входить явно в правую часть, так что исключаются элементы с изменяющимися параметрами и переменные сигналы.

Предполагается, что процессы в системе происходят в результате действия начальных условий, т. е. запасенной в реактивных элементах к моменту $t = 0$ энергии, а также действия постоянных сигналов.

Суть метода состоит в построении кривых взаимной зависимости переменных состояния $x_2 = \varphi(x_1)$ на фазовой плоскости x_1, x_2 и установлении их характеристик на основе геометрических или топологических свойств графиков.

Координатными осями плоскости являются переменные состояния x_1 и x_2 . Изображаемая на этой плоскости направленная кривая зависимости $x_2 = \varphi(x_1)$, называемая траекторией, начинается от начальных точек $x_1(0), x_2(0)$, соответствующих $t = 0$, и оканчивается в точках равновесия, соответствующих $t = \infty$.

В точках равновесия, или особых точках, системы (4.1) производные переменных состояния равны нулю, так что должны удовлетворяться уравнения

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2) &= 0; \\ f_2(x_1, x_2) &= 0.\end{aligned}\tag{4.2}$$

В общем случае может быть несколько особых точек. Построение траекторий для ряда значений начальных условий в различных точках плоскости дает семейство траекторий, называемое фазовым портретом. При наличии нескольких особых точек получим разделение потоков траекторий: часть траекторий будет направлена к одной из точек равновесия, а другая часть — к остальным точкам. Линию раздела потоков траектории называют сепаратрисой.

Изучение геометрической картины или топологии фазового портрета позволяет получить все главные свойства решений системы нелинейных уравнений, описывающей поведение автономной нелинейной системы.

В качестве примера построим траектории собственных колебаний (без внешнего воздействия) в линейной цепи второго порядка — простом последовательном колебательном контуре, допускающем анализ в общем виде. Уравнение равновесия напряжений в контуре: $L di/dt + Ri + \int i dt/C = 0$. Зададимся численными значениями постоянных параметров элементов: $R = 1$; $L = 0,5$; $C = 1$. Дифференциальное уравнение второго порядка для заряда:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \frac{dq}{dt} + 2q = 0 \quad (t > 0). \quad (4.3)$$

Запишем это уравнение в виде уравнений состояния в нормальной форме с напряжением на емкости и током индуктивности в качестве переменных:

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= i; \\ \frac{di}{dt} &= -2u_C - 2i. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Корни характеристического уравнения $p^2 + 2p + 2 = 0$ равны $p_{1,2} = -1 \pm j$.

Решение уравнений (4.4) выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} i &= e^{-t} [I_0 \cos t - (2U_0 - I_0) \sin t]; \\ u_C &= e^{-t} [U_0 \sin t + (U_0 - I_0) \cos t], \end{aligned} \quad (4.5)$$

где I_0 , U_0 — нормированные начальные ток в индуктивности и напряжение на емкости. При $t \rightarrow \infty$ ток и напряжение затухают до нуля: $i = 0$; $u_C = 0$; при этом удовлетворяются уравнения (4.2) для системы (4.4). Начало координат фазовой плоскости является единственной точкой равновесия, или особой точкой.

Если решение уравнений состояния известно, что возможно практически только для линейных цепей, то легко построить соответствующие траектории. Задавая значения времени $t = t_k$ в выражениях переменных состояния, т. е. исключая независимую переменную, получим координаты точек траекторий $x_1(t_k)$, $x_2(t_k)$, соответствующих выбранным начальным условиям.

На рис. 4.1, а изображены графики зависимостей тока и напряжения на емкости (4.5) от времени для начальных условий $U_0 = 1$, $I_0 = 1$, представляющие собой затухающие по экспоненте синусоиды. Взяв ординаты обоих графиков для различных моментов времени, наносим их на фазовую плоскость и получаем фазовую траекторию (рис. 4.1, б), для точек которой указаны значения времени, играющего роль параметра. Траектория в виде спирали от начальной точки $U_0 = 0$, $I_0 = 1$ направлена к началу координат — точке равновесия свободного режима, которая будет достигнута при $t \rightarrow \infty$.

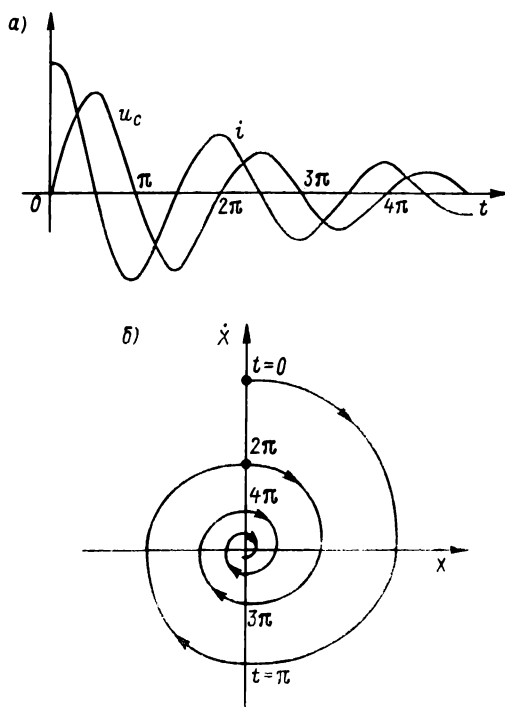


Рис. 4.1

Если известна или задана траектория с указанием параметра — времени, то, взяв проекции на оси координат, можно получить значения $x_1(t_k)$ и $x_2(t_k)$ и построить по ним графики изменения переменных состояния в зависимости от времени. Следовательно, имеется взаимно однозначное соответствие между фазовыми траекториями и решениями уравнений состояния.

Рассмотренные уравнения (4.4) имеют вид уравнений состояния в нормальной форме, когда переменная x_2 , откладываемая по оси ординат, является производной, т. е. скоростью изменения переменной x_1 , откладываемой по оси абсцисс. В этом случае можно установить некоторые закономерности для траекторий. В верхней полуплоскости, где скорость $x_2 = \dot{x}_1$ положительна, должно происходить нарастание x_1 (траектория направлена слева направо), а в нижней полуплоскости, где скорость отрицательна, — убывание x_1 (траектория направлена справа налево). В точках, где траектория пересекает ось x_1 , скорость $x_2 = 0$, что означает неизменность x_1 и, следовательно, пересечение оси траекторией под углом 90° .

Приведенные закономерности не будут соблюдаться в общем случае, когда переменные состояния являются токами и напряжениями произвольно присоединенных к цепи реактивных элементов и не связаны между собой простыми зависимостями в виде производной или интеграла.

Траектории из начальной точки, определяемой начальными условиями, направляются к точкам равновесия или к особым замкнутым траекториям, которые рассматриваются ниже. Указанные конечные состояния достигаются траекториями при $t \rightarrow \pm \infty$. Знак "минус" относится к случаю неустойчивой особой точки. Пройти через особую точку траектории не могут. При этом траектории не должны пересекаться между собой, поскольку решения являются однозначными функциями времени.

В отличие от рассмотренного примера уравнений с известным решением, в случае системы нелинейных уравнений состояния решение обычно неизвестно. Поэтому задача состоит в приближенном построении траекторий, по которым можно выявить основные свойства решений. При этом очень важное значение имеют особые точки, или точки равновесия, систем. Уравнение траектории можно получить, разделив второе уравнение состояния (4.1) на первое:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \quad (4.6)$$

Это дифференциальное уравнение, выражающее тангенс угла наклона касательной в соответствующих точках траекторий, к сожалению, в большинстве случаев аналитически неразрешимо.

4.3. ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Как уже отмечалось, особые точки, или точки равновесия, — это значения переменных $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, при которых одновременно обращаются в нуль правые части автономных уравнений состояния (4.2). В общем случае эта система двух функциональных уравнений может иметь несколько пар корней. Следует отметить, что наряду с рассматриваемыми изолированными особыми точками могут быть отрезки особых линий, на которых удовлетворяются (4.2).

В непосредственной близости от интересующей нас особой точки с координатами λ_1 , λ_2 нелинейные функции в правой части уравнений состояния (4.2) можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться его линейными членами:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &\approx a_{11}(x_1 - \lambda_1) + a_{12}(x_2 - \lambda_2); \\ f_2(x_1, x_2) &\approx a_{21}(x_1 - \lambda_1) + a_{22}(x_2 - \lambda_2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Коэффициенты при отклонениях переменных от координат особой точки равны значениям частных производных функций:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial f_1(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_1}; & a_{12} &= \frac{\partial f_1(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_2}; \\ a_{21} &= \frac{\partial f_2(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_1}; & a_{22} &= \frac{\partial f_2(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Удобно ввести новые переменные состояния

$$y_1 = x_1 - \lambda_1; \quad y_2 = x_2 - \lambda_2. \quad (4.8)$$

Соответствующие этому уравнения состояния, линеаризованные в окрестности особой точки, имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{y}.$$

Введение новых переменных означает перенос начала координат плоскости состояния в точку равновесия (λ_1, λ_2) , так что характер особой точки должен быть исследован в окрестности начала координат на плоскости y_1, y_2 . Процессы изменения во времени переменных состояния и, следовательно, поведение траекторий здесь определяются решениями для y_1 и y_2 , которые зависят от собственных значений матрицы \mathbf{A} , т. е. от корней характеристического уравнения второй степени

$$\det(\mathbf{A} - p\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - p & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - p \end{vmatrix} =$$

$$= p^2 - p(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = p^2 - p\sigma + \Delta = 0, \quad (4.9)$$

где $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ — определитель матрицы \mathbf{A} ; $\sigma = a_{11} + a_{22}$.

Два корня p_1 и p_2 этого уравнения будут устойчивы, если коэффициенты $\sigma \leq 0$ и $\Delta \geq 0$, и неустойчивы, если одно из этих условий (или оба) не выполняются. В зависимости от соотношения между коэффициентами получим различные корни и соответственно этому различные решения для переменных состояния в окрестности особой точки. По виду корней и характеру изменения переменных состояния можно произвести классификацию особых точек. Рассмотрим различные виды особых точек, предполагая уравнения состояния заданными в нормальной форме, когда $x_2 = \dot{x}_1$.

1. Собственные значения матрицы параметров линеаризованной системы p_1, p_2 вещественны. Переменные состояния имеют вид

$$x_1 = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

$$x_2 = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \quad (4.10)$$

Произвольные постоянные интегрирования можно определить из условий удовлетворения начальным условиям $x_1(0)$ и $x_2(0)$.

По решениям (4.10), задаваясь значениями времени, можно для выбранных начальных условий построить траектории, сходящиеся при $t = \pm \infty$ в точке равновесия — начале координат. Среди этих траекторий, отображающих функции (4.10), имеются четыре прямолинейные траектории, которым соответствует прямая пропорциональность между переменными, что возможно, когда последние выражаются через одну экспоненту: $\exp(p_1 t)$ или $\exp(p_2 t)$, т. е. когда $A_2 = 0$ или $A_1 = 0$. При $A_2 = 0$ уравнение траектории $x_2 = p_1 x_1$, а при $A_1 = 0$ оно $x_2 = p_2 x_1$. Как видим, угловыми коэффициентами траекторий-прямых являются корни характеристического уравнения. Рассмотрим различные сочетания знаков вещественных корней.

А. Корни различны, но одного знака: особая точка является узлом. При $p_1 < p_2 < 0$ — отрицательных корнях — имеем устойчивый узел: переменные затухают, траектории направлены к точке равновесия, которая достигается при $t \rightarrow \infty$. Прямолинейные траектории, определяемые корнями p_1 и p_2 и направленные к началу координат, располагаются во втором и четвертом квадрантах. Остальные траектории можно построить по решениям (4.10), состоящим из двух экспо-

нент, задаваясь начальными значениями переменных. Вид траекторий, направленных к особой точке, показан на рис. 4.2, а.

При $p_1 > p_2 > 0$ — положительных корнях — получим неустойчивый узел: переменные неограниченно нарастают во времени, все траектории направлены от особой точки; можно сказать, что последняя достигается при $t = -\infty$. Прямолинейные траектории располагаются в первом и четвертом квадрантах и направлены от начала координат (рис. 4.2, б).

Б. Корни разного знака, $p_1 < 0 < p_2$: особая точка — седло является неустойчивой, так как $\exp p_2 t$ неограниченно нарастает во времени; $\exp p_1 t$ затухает. Две прямолинейные траектории, соответствующие $\exp p_1 t$, располагаются во втором и четвертом квадрантах (рис. 4.3) и направлены к началу координат, а две другие, соответствующие нарастающей $\exp p_2 t$, расположены в первом и третьем квадрантах и направлены от точки равновесия. Имеем, следовательно, четыре полупрямые траектории, называемые сепаратрисами седловой точки. Две из них, L_1 и L'_1 , направленные к точке равновесия, достигают ее при $t \rightarrow +\infty$, а две другие, L_2 и L'_2 , направленные от точки равновесия, достигают ее при $t \rightarrow -\infty$. Любая, сколь угодно близкая к сепаратрисам L_1 и L'_1 траектория будет приближаться к седловой точке и, не достигнув ее, удаляться от нее при $t \rightarrow +\infty$ вдоль сепаратрис L_2 и L'_2 . В результате получается характерное для седла распределение траекторий в его окрестности, показанное на рис. 4.3 и вызванное как затухающей, так и нарастающей экспоненциальными слагаемыми решения (4.10).

2. Собственные значения матрицы параметров линеаризованной системы — комплексно-сопряженные $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega_d$.

Решения для переменных состояния будут иметь вид затухающих ($\alpha < 0$) или нарастающих ($\alpha > 0$) по экспоненте синусоидальных колебаний вида (4.5) с траекториями, показанными на рис. 4.1, б. Траек-

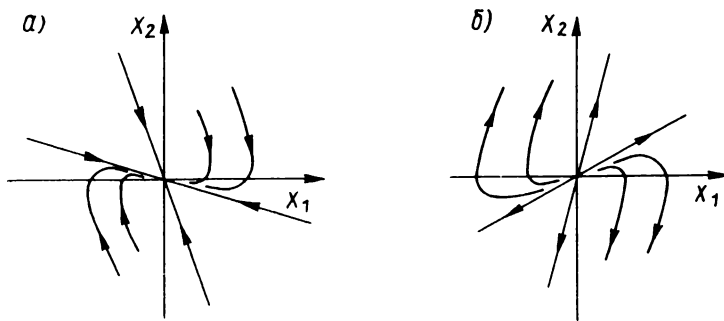


Рис. 4.2

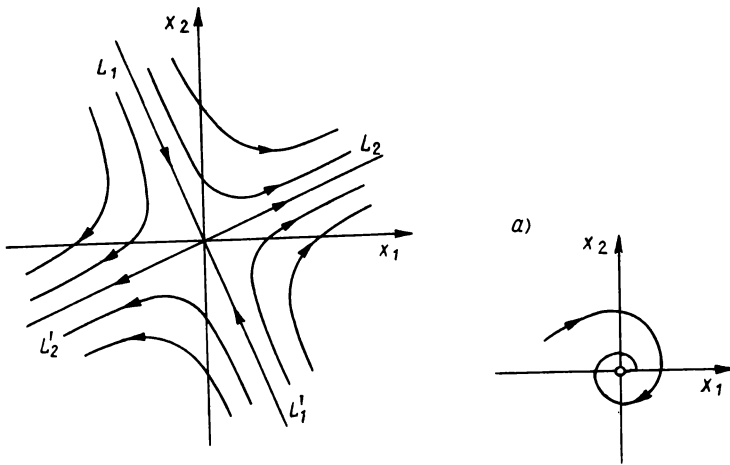


Рис. 4.3

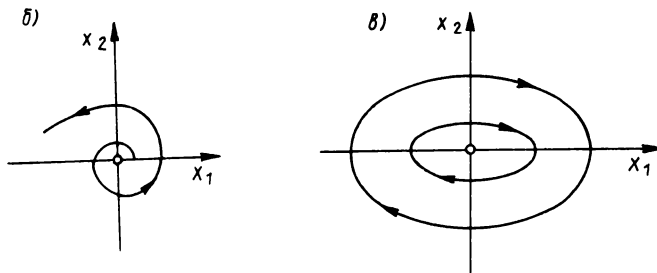


Рис. 4.4

тории будут спиральными линиями, сходящимися к особой точке — началу координат. При $\alpha < 0$ — отрицательной вещественной части — колебания затухают, траектории направлены к началу координат, которое является устойчивым фокусом (рис. 4.4, а) и достигается траекторией при $t \rightarrow \infty$. При $\alpha > 0$ колебания нарастают, траектории направлены от начала координат, являющегося неустойчивым фокусом и достигаемого при $t = -\infty$ (рис. 4.4, б).

При $\alpha = 0$ — мнимых сопряженных корнях — получаем незатухающие колебания: в системе нет потерь. В случае простого колебательного контура согласно (4.5) при $\alpha = 0$ имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= u_C = \rho I \cos(\omega_0 t + \alpha); \\ x_2 &= i = I \sin(\omega_0 t + \alpha), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $I = (I_0^2 + U_0^2/\rho^2)^{1/2}$; $\rho = (L/C)^{1/2}$; $\alpha = \arctg(\rho I_0/U_0)$.

Формулы (4.11) относятся к тому редкому случаю, когда уравнения траекторий можно легко получить путем прямого исключения времени из решений для переменных состояния. Возведя оба выражения в квадрат и складывая, получаем

$$\frac{1}{\rho^2} x_1^2 + x_2^2 = I^2. \quad (4.12)$$

Уравнение траектории представляется уравнением эллипса с центром в начале координат. Как видно, гармонические незатухающие колебания (4.11) изображаются на фазовой плоскости замкнутыми траекториями в виде эллипсов. Охватываемую ими особую точку в рассматриваемом случае называют центром. Размеры эллипсов (рис. 4.4, в) определяются начальным запасом энергии, пропорциональным I^2 и неизменным ввиду отсутствия потерь.

Малым изменениям первоначально запасенной в контуре без потерь энергии будут соответствовать малые изменения размеров охватывающих друг друга эллипсов. Непрерывному медленному отбору малых порций энергии из контура будет соответствовать непрерывное малое уменьшение размеров эллиптических траекторий. Внесение любого малого параметра потерь приведет к нарушению замкнутости траектории, она превратится в стягивающую спираль, а особая точка — в устойчивый фокус.

Для периодических собственных колебаний в консервативных (без потерь) цепях, как линейных, так и нелинейных, характерным является то, что изображающие их замкнутые траектории не являются изолированными: в окрестности каждой из них может располагаться другая замкнутая траектория с измененной на любую малую величину начальной энергией. Как говорят, имеется континуум замкнутых траекторий, окружающих особую точку типа центра. Возникающие в нелинейных автономных цепях без потерь периодические режимы в отличие от режимов в линейных консервативных цепях не являются гармоническими, в них содержатся высшие гармоники, так что форма замкнутых траекторий отличается от эллипса.

Но особо важным является то, что в автономных нелинейных системах с потерями (диссипативных системах) при отсутствии внешнего воздействия могут установиться незатухающие периодические колебания, называемые автоколебаниями. В отличие от собственных колебаний в цепях без потерь, где амплитуда и частота однозначно определяются соответственно запасенной энергией и параметрами контура, амплитуда автоколебаний не зависит от начального запаса энергии, а само существование периодического режима не зависит от изменения параметров в широких пределах, включая параметры потерь. Как было показано в предыдущей главе, автоколебания, имеющие

несинусоидальную форму, возникают также в цепях первого порядка.

Замкнутую траекторию, изображающую периодический автоколебательный процесс в нелинейных системах, называют предельным циклом. В силу отмеченной относительной независимости автоколебаний от начальных условий и параметров цепи предельные циклы не могут располагаться поблизости друг от друга, так что ближайšie к ним как с внутренней, так и с внешней стороны траектории должны быть разомкнутыми: поблизости не должно быть других замкнутых кривых. Предельные циклы, следовательно, должны быть изолированными замкнутыми траекториями. Предельные циклы могут быть устойчивыми или неустойчивыми (орбитно-устойчивыми или неустойчивыми).

Если все траектории, начинающиеся в сколь угодно малой окрестности предельного цикла, приближаются к нему, то имеем устойчивый предельный цикл. Если же хотя бы одна из этих траекторий не приближается к предельному циклу, то последний неустойчив. Различают также полуустойчивый, или двойной предельный, цикл, когда траектории с одной стороны (внешней или внутренней) приближаются к предельному циклу, а с другой (внутренней или внешней) удаляются от него. Название "двойной цикл" отражает то обстоятельство, что этот цикл при изменении параметра цепи порождает два предельных цикла: устойчивый и неустойчивый. На рис. 4.5 изображены три вида предельных циклов:

- 1) устойчивый, при котором траектории как с внутренней, так и с внешней стороны направлены к замкнутой траектории (рис. 4.5, а);
- 2) неустойчивый, при котором траектории как с внутренней, так и с внешней стороны направлены от замкнутой траектории (рис. 4.5, б);
- 3) полуустойчивый; здесь траектории с внешней (внутренней) стороны направлены к предельному циклу, а с внутренней (внешней) стороны — от него (рис. 4.5, в).

В автономных системах может быть несколько охватывающих друг друга изолированных предельных циклов различного вида (устой-

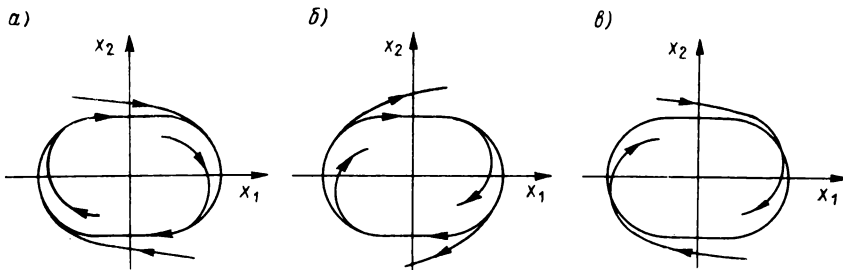


Рис. 4.5

чивых, неустойчивых или полуустойчивых), соответствующих колебаниям с разными амплитудами переменных.

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение генератора высокочастотных колебаний Ван-дер-Поля, полученное в § 3.2.

При нормированных сеточном напряжении и времени уравнение имеет вид $\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$.

Приняв $x = x_1$; $x_2 = \dot{x}_1$, запишем его в виде системы двух уравнений состояния:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2;$$

$$x_2 = f_2(x_1, x_2) = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2.$$

Приравнивание нулю правых частей показывает, что состояние равновесия расположено в начале координат: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. Частные производные в указанной точке равны

$$a_{11} = 0; a_{21} = 1; a_{22} = -1; a_{12} = 0.$$

Соответственно этому

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1 > 0; \quad \sigma = a_{11} + a_{22} = -1 < 0$$

и, следовательно, состояние равновесия неустойчиво. Характеристическое уравнение (4.9)

$$p^2 - p\sigma + \Delta = p^2 + p + 1 = 0$$

имеет пару комплексных сопряженных корней с положительной вещественной частью: $p_{1,2} = (1 \pm j\sqrt{3})/2$, так что состояние равновесия является неустойчивым фокусом. Траектории будут иметь вид раскручивающихся спиралей не только в окрестности начала координат, но и при всех $|x| < 1$, обеспечивающих отрицательный коэффициент перед x : амплитуда напряжения сетки нарастает. При всех $|x| > 1$ получаем положительный коэффициент, что приведет к убыванию амплитуды колебаний и к траектории в виде скручивающейся спирали.

Из рассмотрения траекторий, которые расширяются во внутренней области и сжимаются во внешней, следует, что должна существовать граничная замкнутая траектория — устойчивый предельный цикл при $|x| = 1$. Уравнение цепи в этом случае $\ddot{x} + x = 0$ имеет корни характеристического уравнения $p_{1,2} = \pm j$, дающие решение в виде гармонического колебания. Соответствующая траектория имеет вид окружности единичного радиуса, охватывающей начало координат. Это особая траектория, которая притягивает к себе все траектории, начинающиеся в любой точке фазовой плоскости, как внутри, так и вне окружности $|x| = 1$.

4.4. ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Для приближенного, качественного построения фазового портрета в первую очередь определяют особые точки и на основе линеаризации уравнений устанавливают устойчивость или неустойчивость и вид особых

точек. По этим данным можно нанести траектории в окрестности всех особых точек, допуская некоторую экстраполяцию за ближние окрестности.

В случае линейных систем с единственной особой точкой справедлива экстраполяция на всю фазовую плоскость: вид особой точки определяет фазовый портрет полностью. В случае же нелинейных уравнений, конечно, недостаточно знания траектории только вблизи особых точек, хотя оно и дает достаточно много информации.

Очень важно установление наличия или отсутствия предельных циклов, изображающих автоколебания, и выяснение их устойчивости или неустойчивости. Установление существования и нахождение предельных циклов для произвольной нелинейной системы является трудной задачей.

Имеется ряд методов построения траекторий на фазовой плоскости. Рассмотрим кратко некоторые из них. Начнем с траекторий консервативных цепей, которые строятся простейшими приемами.

Фазовые траектории консервативных систем. Консервативная система, или система без потерь энергии, второго порядка описывается уравнением, не содержащим первой производной. Рассмотрим процессы в консервативных системах на примере свободных колебаний в простом колебательном контуре без потерь — в цепи, составленной из линейной индуктивности и нелинейной емкости с характеристикой

$$u_C = f_C^{-1}(q) = a_1 q + a_3 q^3. \quad (4.13)$$

Уравнение равновесия напряжений в контуре ($L = 1$; $q = x$)

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + a_1 q + a_3 q^3 = \ddot{x} + a_1 x + a_3 x^3 = 0. \quad (4.14)$$

В процессе колебаний полная энергия E в цепи, равная сумме энергии в емкости (потенциальной энергии E_{Π}) и энергии в индуктивности (кинетической энергии E_K), остается постоянной, равной начальной, запасенной в обоих элементах энергии: $E = E_{\Pi} + E_K$.

Энергия в емкости с учетом (4.13) при $q = x$

$$\begin{aligned} E_{\Pi} &= \int_0^q u_C(q) dq = \int_0^x (a_1 x + a_3 x^3) dx = \\ &= \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{4} a_3 x^4. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь принято, что напряжение на емкости равно производной от энергии, $u_C = dE_{\Pi}/dq$.

Соответствующие (4.15) уравнения состояния ($x = x_1 = q$) имеют вид

$$\begin{aligned} q' &= \dot{x}_1 = x_2 = i_L; \\ i_L' &= \dot{x}_2 = -f(x_1) = -a_1 x_1 - a_3 x_1^3 = -u_C = E_{\Pi}'. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Консервативные системы удобно рассматривать, вводя энергетические понятия. Найдем особые точки, удовлетворяющие равенству нулю правых частей уравнений (4.16)

$$x_2 = 0;$$

$$f(x_1) = -a_1 x_1 - a_3 x_1^3 = E_{\Pi}' = 0.$$

Из равенства нулю x_2 следует, что особые точки лежат на оси абсцисс x_1 . Так как производная потенциальной энергии равна правой части второго уравнения состояния, то особые точки на оси x_1 можно находить из условия равенства нулю производной: особые точки будут располагаться в точках минимума и максимума кривой потенциальной энергии. Равновесного состояния в виде узла не должно быть в консервативной цепи, так что возможны особые точки только двух типов: центра и седла. Можно показать, что точки минимумов E_{Π} соответствуют центрам, а точки максимумов — седлам.

Общий характер траекторий консервативной системы можно установить на основе того, что для изменения состояний полная энергия должна превышать потенциальную $E > E_{\Pi}$, а кинетическая энергия $E_K > 0$. На рис. 4.6, *a* изображено несколько уровней полной энергии E_i и график потенциальной энергии (4.15) при отрицательном коэффициенте a_1 , имеющий один минимум и два максимума. Соответственно этому получаем (рис. 4.6, *б*) особые точки: *a* — центр; *b* и *c* — два седла.

Рассмотрим окрестность центра, который изобразится точкой *a* при $E = E_1$; между уровнями E_1 и E_2 имеем $E_K > 0$, т. е. получаем собственные периодические колебания в контуре с небольшими амплитудами тока (ординаты) и заряда емкости (абсциссы), зависящего от напряжения, и соответственно этому замкнутую траекторию. С увеличением E размеры замкнутых траекторий будут возрастать. Рассмотрим окрестность седловой точки *b* (или *c*) при $E = E_4$ с двумя парами сепаратрис, достигающих седловой точки при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$. При $E < E_4$ появятся траектории на участках, где $E_K > 0$. При $E = E_5$ получим внешнюю траекторию, соответствующую достаточно большому, мало изменяющемуся току, приводящему к монотонному нарастанию (или убыванию — в нижней половине) заряда. Как видим, каждому уровню энергии E_i соответствует своя траектория.

Полученный фазовый портрет показывает существование двух различных областей: внутренней области замкнутых траекторий, окружающих устойчивый центр, и внешней области незамкнутых траекто-

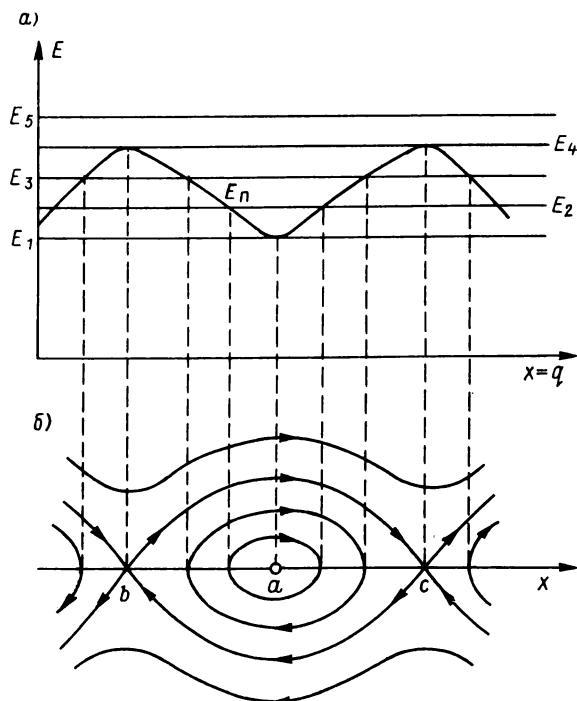


Рис. 4.6

рий. Границей областей являются сепаратрисы седел, идущие от седла b к седлу c и от седла c к седлу b , образуя замкнутую линию. При этом седловые точки достигаются изображающими точками асимптотически при $t \rightarrow \pm \infty$: имеем предельный случай периодического движения с бесконечным периодом.

Характерное свойство консервативных систем состоит в очень высокой чувствительности к параметру потерь: при внесении сколь угодно малого сопротивления происходит нарушение структуры фазового портрета, связанное с затуханием переходного процесса. Особая точка в виде центра превращается в устойчивый фокус, разрываются и исчезают замкнутые траектории, включая идущие из седла в седло сепаратрисы: они скручиваются по спирали к фокусу. На рис. 4.7 изображен получающийся при этом фазовый портрет. Консервативные цепи относят к так называемым негрубым системам, в которых малые изменения коэффициентов уравнений приводят к качественному изменению структуры фазового портрета.

Уравнения консервативной системы

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -f(x_1)$$

в общем случае дают уравнения траекторий с разделяющимися переменными

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f(x_1)}{x_2}.$$

После интегрирования уравнения получаем

$$\frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} f(x_1) dx_1 = E. \quad (4.17)$$

Здесь E — постоянная интегрирования, представляющая собой полную энергию; первое и второе слагаемые в левой части являются соответственно кинетической и потенциальной энергией. Для построения траекторий строится график потенциальной энергии

$$E_{\Pi} = \int_0^{x_1} f(x_1) dx_1$$

в зависимости от x_1 . Точками минимума и максимума графика определяются особые точки: центр, седловая точка. Из (4.17) получаем уравнение траектории

$$x_2 = \pm \sqrt{2 [E - E_{\Pi}(x_1)]}. \quad (4.18)$$

Для любого заданного значения E по ординатам графика потенциальной энергии в намеченной точке x_1 можно определить соответствующие ординаты точки траектории.

Метод изоклин позволяет построить фазовые траектории практически для любых нелинейных уравнений автономных цепей второго порядка. Изоклиной называют линию на фазовой плоскости, которая пересекается различными траекториями под одинаковым углом, т. е. вдоль изоклины наклонов касательных ко всем траекториям остаются одинаковыми. Для получения уравнения изоклины с заданным угловым коэффициентом касательной к траектории k_i следует приравнять его производной dx_2/dx_1 , т. е. согласно (4.6) положить

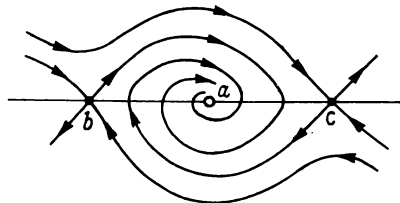


Рис. 4.7

$$k_i = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}.$$

Отсюда уравнение изоклины будет

$$f_2(x_1, x_2) = k_i f_1(x_1, x_2). \quad (4.19)$$

Задаваясь различными значениями k_i , можно построить на фазовой плоскости семейство изоклин. На каждой изоклине на некоторых расстояниях друг от друга наносятся короткие отрезки прямых (называемые линейными элементами) под углом $\arctg k_i$. В результате указанных построений множество линейных элементов интересующей нас области плоскости образует поле направлений. Теперь можно построить траектории так, чтобы их участки, пересекающие изоклины, совпадали с линейными отрезками. При нанесении траекторий следует учитывать предварительно построенные направления траекторий в окрестности особых точек. Метод изоклин, таким образом, позволяет получить фазовый портрет, соответствующий исследуемому уравнению автономной системы.

В качестве примера рассмотрим построение траекторий для уравнения Ван-дер-Поля (3.19). Нормальная форма уравнений состояния ($x_1 = x$) такова:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1.$$

Согласно (4.19) уравнение изоклины

$$x_2 = \frac{x_1}{\mu(1 - x_1^2) - k_i}. \quad (4.20)$$

Вид изоклин и, следовательно, траекторий, т. е. решений, в сильной степени зависит от параметра нелинейности μ . Фазовые траектории должны строиться для определенных значений μ . Изоклину для принятого углового коэффициента можно построить по точкам, вычисляя их ординаты по значениям абсцисс x_1 . На рис. 4.8 приведены изоклины, рассчитанные для $\mu = 0,25$ и угловых коэффициентов $k_i = 0; \pm 1$. По нанесенным направлениям линейных отрезков построены траектории, направленные к замкнутой линии — предельному циклу.

Из приведенного примера видно, что построение траекторий методом изоклин связано с трудоемкими расчетами. Существуют менее общие и менее трудоемкие, чем этот, методы построения траекторий. Рассмотрим один из них — широко применяемый метод Льенара.

Метод Льенара является менее общим, чем метод изоклин, и применяется к уравнениям цепей второго порядка с линейными реактив-

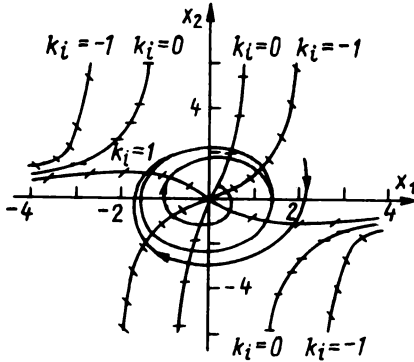


Рис. 4.8

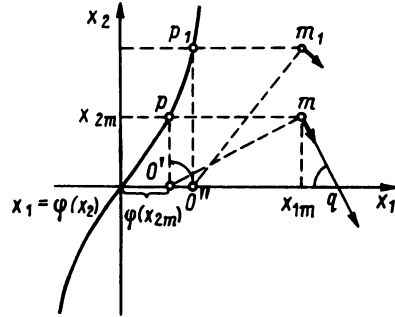


Рис. 4.9

ными и нелинейными резистивными элементами. С уравнениями подобного типа наиболее часто приходится иметь дело на практике.

В § 3.2 было получено уравнение (3.14) колебательного контура с линейными L - и C -элементами и нелинейным резистивным элементом с характеристикой $f_R(i)$. Приведем уравнения состояния, приняв нормированные значения $L = 1$ и $C = 1$, а также обозначения $x_1 = u_C$; $x_2 = i$:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad (4.21)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - f_R(x_2). \quad (4.22)$$

Соответствующее этому уравнение второго порядка относительно переменной $x_1 = u_C$ имеет вид

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + f_R(\dot{x}_1) + x_1 = 0. \quad (4.23)$$

Нелинейное слагаемое, как видно, определяется характеристикой нелинейного резистивного элемента и является функцией первой производной (тока) от переменной (заряда). Для таких именно уравнений и применяется метод Лянара, так что исследуемые уравнения путем нормирования должны быть приведены к виду (4.21). Согласно (4.19) уравнение изоклины для системы (4.21) примет вид

$$k_i = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-x_1 + f_R(x_2)}{x_2}. \quad (4.24)$$

Здесь достаточно построить только одну изоклину с угловым коэффициентом $k_i = 0$, уравнение которой определяется нелинейным слаженным в (4.24):

$$x_1 = \varphi(x_2).$$

Построение начинается с нанесения на плоскость x_1, x_2 графика этой зависимости (рис. 4.9). Для определения направления траектории в интересующей нас точке m проводим из этой точки горизонтальную линию до пересечения с графиком нулевой изоклины в точке p , которая затем проецируется на ось абсцисс в точку O' . Эта точка на оси x_1 служит центром, из которого наносится короткая дуга окружности, проходящая через точку m и являющаяся малым участком искомой траектории в окрестности этой точки. Приняв за исходную новую точку m_1 , повторяют построения. Получают новый центр, из которого наносят короткую дугу окружности, проходящую через точку m_1 , и т. д.

После построения траекторий желательно указать на некоторых их точках соответствующие значения времени, которые позволяют построить графики решений в зависимости от времени. Пусть началом интересующей нас траектории $x_2 = \varphi(x_1)$, соответствующим $t = 0$, является точка $x_1(0), x_2(0)$. Тогда, определяя время t_1 для соседней точки $x_1(t_1), x_2(t_1)$, интегрируя первое уравнение состояния $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = f_1[x_1, \varphi(x_2)]$, получим

$$t_1 = \int_{x_1(0)}^{x_1(t_1)} \frac{dx_1}{f_1[x_1, \varphi(x_1)]}.$$

Время, требуемое для прохождения изображающей точкой участка траектории между двумя точками, численно равно площади, ограниченной функцией $1/f_1$ и рассматриваемым участком. Практически приходится строить график $1/f_1$ в зависимости от x_1 , используя ординаты траектории, и оценивать площадь под участком между парой последовательных точек $x_1(t_k)$ и $x_1(t_{k+1})$.

4.5. О КАЧЕСТВЕННОЙ СТРУКТУРЕ РАЗБИЕНИЯ НА ТРАЕКТОРИИ

В предыдущих параграфах приведены общие сведения о траекториях на фазовой плоскости. Приведем здесь некоторые дополнительные сведения и дадим понятие о построении качественной структуры фазового портрета. Ввиду краткости изложения опускаются выводы и доказательства ряда положений теории, которые можно найти в литературе [4, 6, 11].

Будем рассматривать автономные динамические цепи второго порядка, описываемые парой уравнений состояния

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2); \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{4.25}$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_{10}$; $x_2(0) = x_{20}$.

Пусть правые части уравнений являются аналитическими функциями, т. е. могут быть разложены в сходящиеся ряды по степеням переменных x_1 и x_2 в каждой точке интересующей нас области плоскости, или кусочно-аналитическими функциями. Тогда, как доказывается в математике, существует единственное решение системы (4.25), удовлетворяющее любым начальным условиям x_{10}, x_{20} :

$$x_1(t) = \psi_1(t); \quad x_2 = \psi_2(t).\tag{4.26}$$

При этом решения дифференциальных уравнений состояния будут непрерывным образом зависеть от начальных условий:

$$x_1 = \psi_1(t, x_{10}, x_{20}); \quad x_2 = \psi_2(t, x_{10}, x_{20}).$$

Множество точек на плоскости x_1, x_2 с координатами $\psi_1(t_k)$, $\psi_2(t_k)$, определяемыми для последовательных значений времени $t = t_k$ в пределах от $t = t_0 = 0$ до $t = \infty$, образует, как указывалось, фазовую траекторию, направленную в сторону возрастания времени.

Фазовая траектория с указанием значений времени является геометрическим представлением частного решения (4.25). Обратно, заданной на фазовой плоскости траектории, начинающейся в точке x_{10}, x_{20} , соответствует решение системы с начальными условиями $x_1(t_0)$ и $x_2(t_0)$.

Согласно (4.19) угловые коэффициенты касательных в каждой точке траекторий будут определяться векторами, составляющие которых по осям x_1, x_2 соответственно равны правым частям уравнений $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)$. Нанеся на множество точек интересующей нас области векторы в виде направленных отрезков, касательных к траекториям, получим векторное поле, которое будет непрерывным за исключением особых точек. Особая точка является стоком векторного поля, которое претерпевает здесь разрыв — исчезает.

Область фазовой плоскости, в которой исследуются решения дифференциальных уравнений, принимается ограниченной ожидаемыми максимальными значениями переменных состояния.

Траектории фазовой плоскости или фазового пространства делятся на два класса: особые и неособые (обычные) траектории. К особым траекториям относятся состояния равновесия, предельные циклы, сепаратрисы седловых точек.

Каждая траектория изображает определенное частное решение уравнения для заданных начальных условий.

Особая точка с координатами a, b дает установившееся решение $x_{1y} = a, x_{2y} = b$. Если выбрать начальные условия $x_1(0) = a$ и $x_2(0) =$

$= b$, то сразу, без переходного процесса получим установившийся режим. Следовательно, особая точка изображает указанное частное решение и поэтому должна рассматриваться как особый вид траектории, которая начинается и заканчивается в одной и той же точке, соответствующей положению равновесия.

Предельный цикл также является особой траекторией, изображающей установившееся периодическое решение. При выборе начальных условий в любой точке цикла получим установившийся режим сразу, без переходного процесса.

Кроме особых точек и предельных циклов к особым траекториям относят сепаратрисы седловых точек, образующие замкнутые контуры (см. рис. 4.10, в): две пары сепаратрис седловой точки, стремящейся к ней при $t \rightarrow -\infty$ и входящие при $t \rightarrow \infty$ в свое же седло, образуют замкнутый контур в виде восьмерки. К этому контуру могут стремиться, "наматываясь" на него, обычные траектории.

Как уже говорилось, все остальные траектории, не относящиеся к особым, называются неособыми или обычными. Эти траектории направляются от начальных точек $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$ к указанным особым траекториям (рис. 10, а, б).

Вводят понятие полутраекторий — положительных и отрицательных. Положительная полутраектория L^+ — это часть траектории от начальной точки x_{10} , x_{20} до конечной, соответствующая решению для $t \geq t_0$ (от $t = t_0$ до $t = +\infty$), а отрицательная полутраектория соответствует решению для $t \leq t_0$ (от $t = t_0$ до $t = -\infty$). Целой называют траекторию, соответствующую решению для $-\infty < t < \infty$. Такой траекторией, в частности, является предельный цикл, целиком лежащий в ограниченной области и отображающий периодическое решение для всех $-\infty < t < \infty$.

Вводят также понятие предельной точки M полутраектории L^+ , изображающей решение $x_1 = \psi_1(t)$, $x_2 = \psi_2(t)$ для $t \geq t_0$. Если a , b — координаты предельной точки, то должна существовать неограниченно возрастающая последовательность моментов времени t_0 , t_1, \dots, t_n (при $n \rightarrow \infty$ $t_n \rightarrow \infty$), такая, что в пределе

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_1(t_n) = a; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_2(t_n) = b.$$

Точка $M(a, b)$ является предельной точкой полутраектории L^+ . Аналогично вводится предельная точка для отрицательной полутраектории. Предельными точками для полутраекторий, направленных к положениям равновесия, являются узлы, фокусы и седла, а для траекторий, идущих по спиралям к предельному циклу, — каждая точка этого цикла. Если предельная точка $M(a, b)$ полутраектории L^+ лежит на траектории L_0 , то последнюю называют предельной траекторией, все ее точки

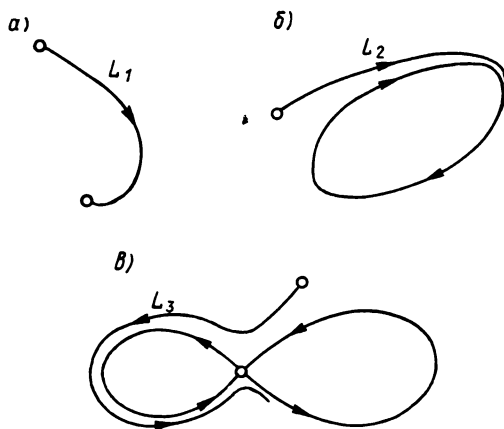


Рис. 4.10

считаются предельными для L^+ . Предельный цикл является предельной траекторией для любой наматывающейся на него полутраектории.

Совокупность всех упомянутых предельных точек и траекторий называют предельным множеством.

После установления возможных типов предельных траекторий можно указать соответствующие типы полутраекторий. Полутраекториями L^+ являются: 1) полутраектория, идущая к точке равновесия (рис. 4.10, а); 2) полутраектория, направленная к предельному циклу (рис. 4.10, б); 3) полутраектория, стремящаяся к контурам, образованным сепаратрисами седла (рис. 4.10, в). Сюда же можно отнести полутраекторию в виде состояния равновесия.

Если правые части уравнений состояния (4.25) являются аналитическими функциями, то, как доказывается в математике, число особых траекторий — состояний равновесия и предельных циклов — конечно. И далее, если имеется на фазовой плоскости замкнутая траектория, то внутри нее непременно должна находиться хотя бы одна точка равновесия.

Ввиду невозможности аналитического решения уравнений нелинейных систем основным общим приемом изучения их поведения является качественное исследование. Для качественного исследования нет необходимости в точном построении траекторий в заданной ограниченной области плоскости, что связано с большими трудностями. Вполне достаточно построения качественной структуры разбиения на траектории фазовой плоскости.

Качественную структуру разбиения можно получить, нанося на фазовую плоскость особые траектории, для чего необходимо знать

все особые траектории, их характер, устойчивость предельных циклов и взаимное расположение в пределах ограниченной области плоскости. Для выяснения того, какие из особых траекторий системы нужно учитывать при построении качественной структуры разбиения, следует остановиться на понятии грубых систем.

В теории нелинейных динамических систем принимается очень важное положение, что при малых изменениях параметров или коэффициентов уравнений решения и соответствующие им траектории мало изменяются, так что качественный характер решений и качественная структура разбиения траекторий сохраняются прежними. Системы, обладающие указанным свойством, называют грубыми. Только в предположении свойства грубости можно говорить об определенном характере решения, не зависящего от малых вариаций параметров, и вообще о возможности изучения поведения системы.

В грубых системах могут быть особые траектории следующих типов, рассмотренных выше и также называемых грубыми: 1) конечное число состояний равновесия в виде устойчивых и неустойчивых узлов, фокусов и седел; 2) орбитно-устойчивые и неустойчивые простые предельные циклы, число которых конечно; 3) сепаратрисы седел, направленные к узлам, фокусам и предельным циклам.

В грубых системах не должно быть особых точек типа центра, соответствующего паре мнимых сопряженных корней характеристического уравнения (4.9). Для этого необходимо выполнение условия $\sigma = a_{11} + a_{22} \neq 0$, обеспечивающего не равную нулю вещественную часть корней. Далее, в грубых системах должны отсутствовать сепаратрисы, идущие из седла в седло или в свое же седло.

Перейдем к построению качественной структуры разбиения фазовой плоскости. Следует прежде всего отметить, что здесь не требуется определять расположение всех траекторий в заданной ограниченной области плоскости. Достаточно знать упомянутые особые траектории, число которых, как отмечено, конечно и обычно невелико, и их взаимное расположение.

Допустим, что все перечисленные особые траектории, лежащие в заданной ограниченной области, известны. Тогда, нанеся эти траектории на плоскость x_1, x_2 , получим фазовую плоскость, разделенную на подобласти — ячейки. Границами ячеек, число которых конечно, будут точки особых траекторий. В полученных элементарных ячейках расположатся обычные неособые траектории. Направления этих траекторий можно приближенно нанести в соответствии с характером граничных особых траекторий.

Полученное качественное разбиение фазовой плоскости дает всю картину возможных процессов в автономной нелинейной системе при любых начальных условиях.

В зависимости от вида и числа особых траекторий получаются различные качественные разбиения на ячейки. Устойчивые узлы и фокусы,

к которым направляются траектории из отдельных ячеек, определяют установившиеся постоянные режимы. Устойчивые предельные циклы, к которым направлены траектории из других областей, определяют установившиеся периодические режимы.

К каждому из устойчивых предельных состояний будут направлены траектории из определенных ячеек — областей притяжения, так что в общем случае фазовая плоскость будет разбита на ряд таких областей. Траектории двух смежных областей с притяжением к различным устойчивым предельным состояниям будут разделяться неустойчивыми предельными циклами или некоторыми сепаратрисами. Предельное множество с притяжением траекторий называют аттрактором.

Рассмотрим простейшие примеры качественного разбиения на траектории и некоторые виды ячеек.

1. Особые траектории уравнения цепи состоят из неустойчивого фокуса в начале координат и одного устойчивого предельного цикла. Нанеся эти траектории на плоскость, получаем структуру разбиения, показанную на рис. 4.11, а. Зная характер указанных особых траекторий, легко изобразить ход неособых траекторий в двух областях: внутренней, ограниченной предельным циклом и неустойчивым фокусом, и внешней — снаружи замкнутой траектории. При любых начальных условиях траектории стремятся при $t \rightarrow \infty$ к предельному циклу: в цепи возбуждаются и устанавливаются автоколебания. При нулевых начальных условиях из-за неизбежных малых флуктуаций тока в цепи будут постепенно по мере раскручивания траекторий нарастать колебания: получим "мягкое" самовозбуждение колебаний.

2. Особые траектории состоят из устойчивого фокуса в начале координат и охватывающих его двух предельных циклов: неустойчивого и устойчивого (снаружи, рис. 4.11, б). По характеру особых точек легко установить поведение неособых траекторий. Автоколеба-

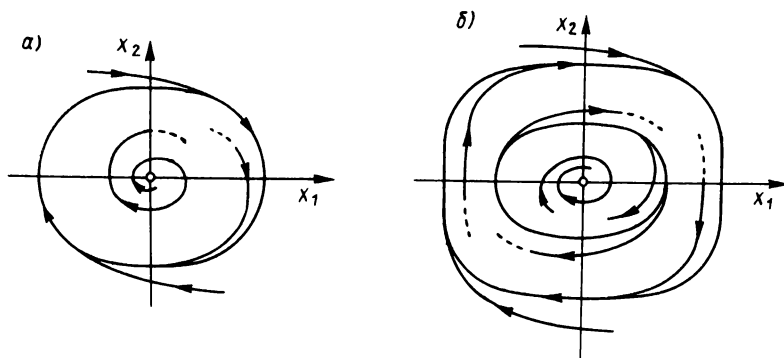


Рис. 4.11

ния возникают только при начальных условиях, лежащих за неустойчивым предельным циклом. Если начальная точка лежит внутри последнего, то колебания затухают до нуля. Для получения колебаний следует приложить начальный толчок достаточного уровня: получаем "жесткое" возбуждение автоколебаний, которые установятся после некоторого нарастания или спада от начальной точки, в зависимости от того, где она находится: в пределах или вне устойчивого цикла. Неустойчивый цикл, как видно, играет роль граничной линии, разделяющей две области с притяжениями к точке равновесия и к устойчивому предельному циклу.

3. Особые траектории состоят из одного седла и двух состояний равновесия: устойчивого O и неустойчивого O_1 (рис. 4.12, а). Две сепаратрисы, достигающие седла при $t \rightarrow -\infty$, направляются к узлу O , образуя границу односвязной области. К нему же направлены неособые траектории от узла O_1 . От последнего к седлу идет сепаратриса, достигающая его при $t \rightarrow +\infty$. Неособые траектории нанесены с учетом характера предельных точек. Вместо состояния равновесия может быть предельный цикл.

4. Особые траектории состоят из двух седел и двух состояний равновесия: устойчивого и неустойчивого (рис. 4.12, б). Граница области образуется парой сепаратрис каждого седла, стремящихся к седлу при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow -\infty$. Вместо состояния равновесия может оказаться предельный цикл.

Основной, самой трудной проблемой в построении качественной структуры фазовой плоскости является определение всех особых траекторий заданной системы уравнений: состояний равновесия и предельных циклов.

В первую очередь необходимо определить все положения равновесия и установить их тип и характер. Для этого, как указывалось,

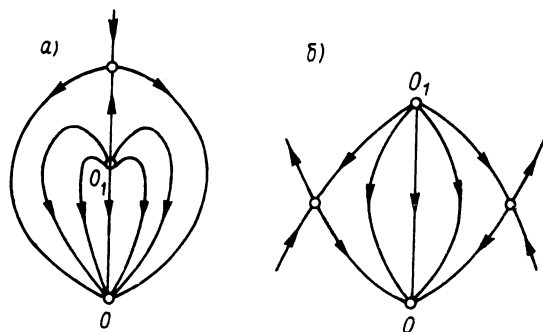


Рис. 4.12

нужно решить систему двух функциональных уравнений

$$f_1(x_1, x_2) = 0; \quad f_2(x_1, x_2) = 0 \quad (4.27)$$

и, произведя линеаризацию в окрестности особых точек, определить корни характеристического уравнения. Данная задача в ряде случаев может оказаться непрстой.

Очень трудной, далеко не решенной является задача определения предельных циклов; установление наличия или отсутствия замкнутых траекторий также связано с большими трудностями.

4.6. ПОНЯТИЕ О БИФУРКАЦИИ

Если параметры исходной цепи изменяются, то будут изменяться коэффициенты в правой части уравнений. Соответственно этому будут изменяться решения уравнений и отображающие их траектории.

Как отмечалось, в грубых системах малые изменения параметров цепи приводят к малым изменениям решений уравнений и траекторий, так что качественная структура разбиения на траектории сохраняется. В таких системах непрерывное изменение параметров в некоторых пределах будет приводить к непрерывному количественному изменению траекторий при сохранении типов всех особых траекторий.

В общем случае нескольких изменяемых параметров рассмотрение ведется в многомерном пространстве параметров, в частном же случае двух параметров — на плоскости параметров. Анализ влияния параметров связан здесь с большими трудностями. Ограничимся обычно рассматриваемым одномерным случаем — одного изменяемого параметра λ системы с уравнениями состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \lambda); \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \lambda). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Изменение интересующей нас характеристики (установившегося напряжения, частоты) в зависимости от λ можно изображать графиком в декартовой системе координат, называемым бифуркационной диаграммой. Если исходное свойство грубости сохраняется, то исследуемая характеристика вначале не изменяется. Но при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_0$, называемом бифуркационным, происходит резкое изменение характеристики, вызванное качественным изменением структуры разбиения на траектории.

Качественное изменение решений и траекторий при вариации параметров, называемое бифуркацией, состоит в изменении вида, исчезновении или появлении новых особых траекторий: особых точек, замкнутых траекторий, а также в изменении сепаратрис, устойчивости особых

точек и предельных циклов, возникновении или исчезновении автоколебаний и т. п.

Бифуркационное значение параметра $\lambda = \lambda_0$ является граничной точкой между двумя грубыми системами, разделенными сколь угодно малым отклонением параметра λ от значения λ_0 : исходная система сохраняется при $\lambda < \lambda_0$, а новая грубая система наступает при $\lambda > \lambda_0$ и будет сохранять свою структуру разбиения на траектории при дальнейшем нарастании параметра до следующего бифуркационного значения.

Из бифуркационной диаграммы следует, что почти для всех значений параметра система второго порядка является грубой за исключением лишь окрестности $\lambda = \lambda_0$, где малое изменение параметра приводит к новой качественной структуре с новыми особыми траекториями грубой природы.

При бифуркационном значении параметра $\lambda = \lambda_0$ система теряет грубость и становится негрубой, в которой малые изменения параметра приводят к конечным изменениям структуры фазового портрета.

Негрубые системы в зависимости от коэффициентов уравнений могут обладать различными свойствами, от которых зависит структура фазового портрета, получающегося в результате бифуркации. В тех случаях, когда бифуркация приводит к одной особой траектории, говорят о первой степени негрубости.

В отличие от грубых систем в негрубых системах состояния равновесия и предельные циклы имеют более сложный характер. Приведем некоторые сведения о состояниях равновесия негрубых систем. Здесь определитель (4.9) матрицы состояний линеаризованной в окрестности положения равновесия системы равен нулю: $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Характеристическое уравнение (4.9) приобретает вид $p^2 + \sigma p = 0$, так что имеем один вещественный и один нулевой корень, а при $\Delta = 0$ и $\sigma = a_{11} + a_{22} = 0$ — два нулевых корня характеристического уравнения.

Установление характера и свойств особых точек в данном случае существенно усложняется, их невозможно выявить из линеаризованных в окрестности особых точек уравнений. Здесь необходимо учитывать нелинейные добавки, зависящие от функций $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$. Не вдаваясь в подробности и не приводя выводов, перечислим типы особых точек, расположенных в начале координат и называемых сложными.

В случае $\Delta = 0$ и $\sigma = a_{11} + a_{22} \neq 0$ имеем один нулевой и один вещественный корень характеристического уравнения. В зависимости от нелинейных параметров правых частей исходных уравнений получают: сложный узел, сложное седло и седло-узел. Распределения траекторий в окрестности первых двух состояний равновесия имеют такой же вид, как для простого узла и простого седла. Распределение траекторий в окрестности особой точки типа седло-узел показано на рис.4.13, а

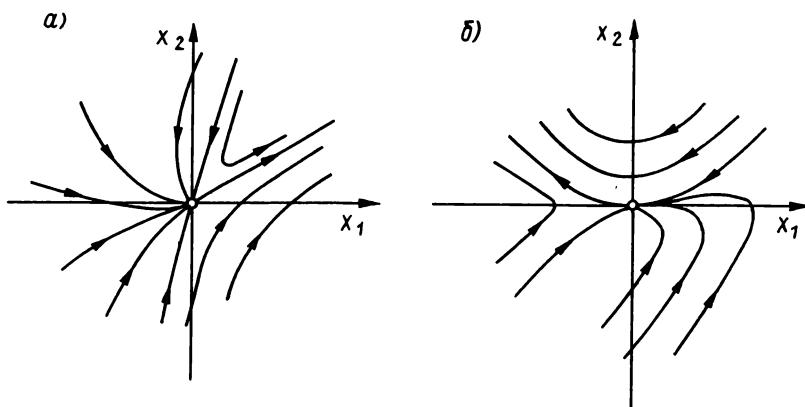


Рис. 4.13

с явным разделением на сектор устойчивого узла и сектор седла с границей из сепаратрис седла, стремящихся при $t \rightarrow +\infty$ к точке равновесия. Граница, разделяющая сектор неустойчивого узла и сектор седла, будет состоять из сепаратрис, стремящихся к точке равновесия при $t \rightarrow -\infty$.

В случае $\Delta = \sigma = 0$ имеем двукратный нулевой корень характеристического уравнения. В зависимости от параметров нелинейных членов правых частей исходных уравнений получаются: состояние равновесия в начале координат вида седло-узел (рис. 4.13, б) с одной полутраекторией, стремящейся к точке равновесия при $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$), а также положения равновесия с качественными характеристиками седла, узла и фокуса.

Рассмотрим некоторые примеры бифуркаций в автономной цепи с первой степенью негрубости, приводящих к преобразованиям особых траекторий. Порядок преобразований получается обратимым: если при нарастании параметра преобразования происходят в определенной последовательности, то при уменьшении λ преобразования пройдут в обратном порядке.

Приведем следующие примеры:

1. Состояния равновесия могут изменить свой вид, если увеличение параметра λ обращает в нуль Δ или σ . Исчезновение простой особой точки типа узла происходит в результате предварительного объединения его с седловой точкой, образующего сложную точку равновесия типа седло-узел, которая затем исчезает (рис. 4.14). Если теперь уменьшать λ , то появившаяся сложная точка может образовать узел и седло или исчезнуть.

2. С изменением (увеличением) параметра λ может появиться полустойчивый предельный цикл. Последующее изменение параметра при-

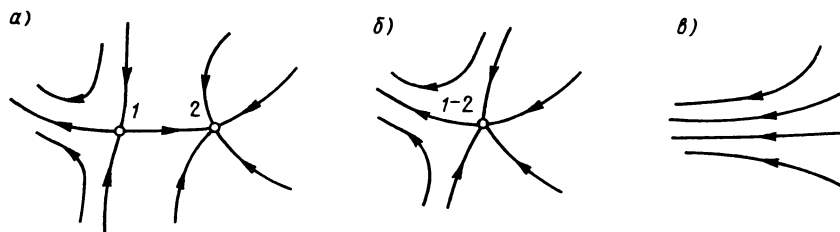


Рис. 4.14

водит к разделению этого сложного цикла на два предельных цикла: устойчивый и неустойчивый. При изменении параметра в обратную сторону (уменьшении) устойчивый и неустойчивый предельные циклы могут при слиянии образовать полуустойчивый предельный цикл.

3. Предельный цикл может образоваться из сложного фокуса — состояния равновесия в случае $\sigma = 0$, $\Delta > 0$ — и, обратно, возможно стягивание предельного цикла в точку равновесия в виде сложного фокуса. При увеличении параметра λ устойчивый вначале фокус может превратиться в неустойчивый; при этом образуется устойчивый предельный цикл. При других коэффициентах уравнений неустойчивый вначале фокус может превратиться в устойчивый с образованием неустойчивого или устойчивого предельного цикла, который стягивается в устойчивый фокус.

4. Предельный цикл может зародиться из сепаратрисы, идущей из седла в седло. Начальное расположение траекторий при наличии седла и неустойчивого фокуса, показанное на рис. 4.15, а, с увеличением параметра может измениться так, что в результате сближения сепаратрисы образуют петлю: сепаратриса входит в свое же седло (рис. 4.15, б). При дальнейшем изменении λ сепаратрисы могут раз-

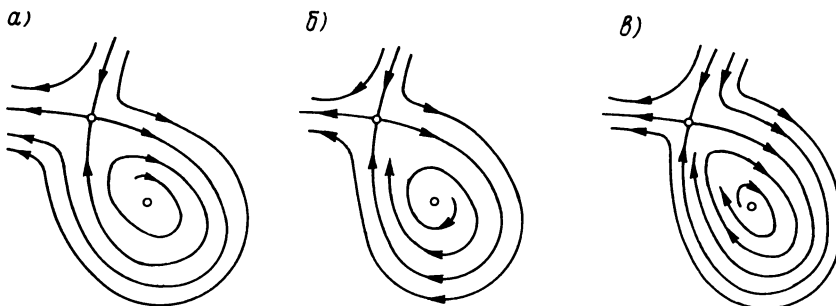


Рис. 4.15

делиться, при этом от существовавшей петли сепаратрисы может отделиться предельный цикл (рис. 4.15, в).

Возможно также образование предельного цикла в результате объединения узла и седла в сложную точку седло-узел с сепаратрисой, выходящей из этой точки и входящей в нее же при $t \rightarrow \infty$. Если при последующем изменении рассматриваемая сложная точка исчезает, то образуется предельный цикл вблизи исчезающей замкнутой сепаратрисы.

4.7. ТОЧЕЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

При исследованиях структуры фазовых траекторий применяют так называемое точечное отображение, основанное на понятии функции последования. Для введения этой функции проведем на фазовой плоскости не проходящий через особые точки отрезок прямой l между крайними точками c, d (рис. 4.16). Если этот отрезок не является касательной к любой соприкасающейся с ним траектории, то его называют отрезком без контакта. Траектории могут только пересекать отрезок без контакта.

Рассмотрим траекторию в виде спирали, например наматывающуюся на устойчивый предельный цикл или стремящуюся к устойчивому фокусу. Пусть первой отмеченной точкой пересечения с отрезком l (рис. 4.16, а) будет точка 1, которую определим параметром s — расстоянием от точки c . Возвратившись через оборот, траектория пересечет l в следующей точке 2 с параметром \bar{s} , и далее могут быть последующие точки пересечения 3, 4, ..., если форма траектории такая, что она возвращается к входной стороне отрезка без контакта.

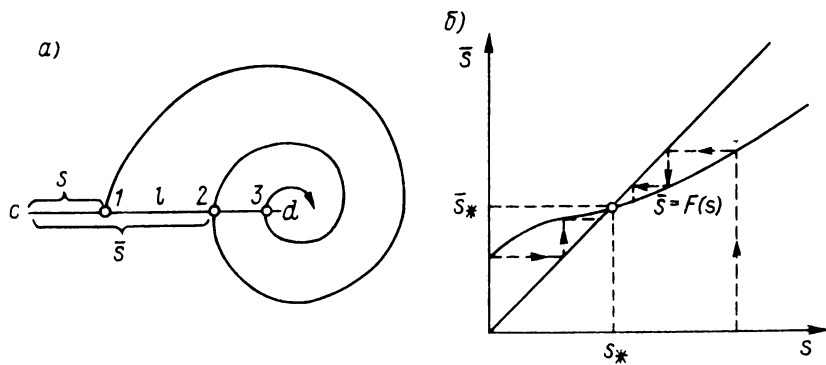


Рис. 4.16

Другие траектории, начинающиеся вблизи начальной точки l , очевидно, также будут иметь последующие точки пересечения с отрезком l , расположенные поблизости от точек $2, 3, \dots$, в силу непрерывной зависимости траекторий от начальных условий.

Свойства траектории выражаются в определенной зависимости между параметрами s и \bar{s} исходной и последующей точек пересечения траектории с отрезком без контакта, называемой функцией последования:

$$\bar{s} = F(s). \quad (4.29)$$

Функцию последования, которая устанавливает взаимно однозначным образом соответствие между точками отрезка l и последующими точками, принадлежащими тому же отрезку, рассматривают как точечное отображение отрезка l в себя. Вид функции последования (4.29) зависит от вида и свойств траектории и характеризует ее. Поэтому исследование свойств траекторий можно проводить по виду точечного отображения, производимого функцией последования (4.29).

В частном случае предельных циклов исходная точка пересечения совпадает со всеми последующими: после каждого оборота изображающая точка проходит через исходную s_* , которая является неподвижной точкой отображения,

$$s_* = F(s_*). \quad (4.30)$$

Задачу поиска предельных циклов, следовательно, можно свести к задаче определения неподвижной точки точечного отображения.

Из рассмотрения параметра — расстояния \bar{s} (от начальной точки s до точек пересечения траектории с отрезком l) — можно видеть, что функция последования является нарастающей функцией с положительной производной $d\bar{s}/ds$. Если график функции построен, то неподвижная точка $s_* = \bar{s} = s$ будет определяться точкой пересечения графика с биссектрисой — прямой, проходящей через начало координат под углом 45° . Наличие точки пересечения означает существование предельного цикла. На рис. 4.16, б произведено построение так называемой лестницы Ламорея — последовательности точек, определяемых функцией последования:

$$s_1 = F(s); \quad s_2 = F(s_1); \quad \dots$$

Как видим, для принятой кривой функции последования эта последовательность сходится к предельной — неподвижной точке s_* — как со стороны $s < s_*$, так и со стороны $s > s_*$. Это означает, что траектории направлены к устойчивому предельному циклу как снаружи, так и с внутренней стороны. Соответственно этому неподвижная точка, к которой сходится последовательность, является устойчивой.

Таким образом, с помощью точечного отображения можно определять наличие или отсутствие предельного цикла и его устойчивость.

Но главная трудность состоит в нахождении функции последования. В большинстве случаев не удастся получить явное выражение этой функции. Поэтому применяют запись функции с введением параметра τ_k — времени прохождения по траектории от исходной точки к последующей точке. Но для определения τ_k нужно иметь решение по возможности в общем виде с начальными условиями и наиболее важными параметрами. Практически это выполнимо только для линейных уравнений второго порядка.

В связи со сказанным точечное преобразование применяют для построения качественной структуры фазовой плоскости для автономных кусочно-линейных систем, у которых правые части уравнений состояния являются кусочно-гладкими функциями. Такие уравнения получаются при кусочно-линейном представлении нелинейных характеристик элементов. При этом фазовая плоскость разбивается на несколько областей, в каждой из которых уравнения системы будут линейными, допускающими решение в аналитическом виде. На границах раздела областей полученные решения должны быть согласованы, или, как говорят, сшиты.

Рассмотрим некоторые, поясняющие идею моменты применения метода точечного отображения на простом примере построения траекторий для уравнения генератора высокочастотных колебаний на триоде, которое было получено в § 3.2. В отличие от представления нелинейностей анодно-сеточной характеристики нечетным полиномом третьей степени, приводящего к уравнению Ван-дер-Поля (3.19), применим кусочно-линейное приближение, показанное штрихами на рис. 3.5, в. Ограничившись двумя линейными участками с точкой сопряжения или излома ($U, 0$), где U — принятое напряжение отсечки анодного тока, имеем

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 0, & f'_{u_1} &= 0, & u_1 &< -U; \\ f(u_1) &= Su_1, & f'_{u_1} &= S, & u_1 &> -U, \end{aligned}$$

где S — крутизна характеристики на линейном участке.

Уравнение (3.17) для напряжения сетки разбивается на два линейных уравнения для каждого из линейных участков:

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0^2 RC \frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = U, \quad u_1 < -U;$$

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0^2 (RC - SM) \frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = 0, \quad u_1 > -U.$$

Разделим оба уравнения на U и ω_0^2 и перейдем к нормированному напряжению и нормированному времени:

$$\begin{aligned}x &= u_1/U; & u_1 &= xU; \\ \theta &= \omega_0 t; & t &= \theta/\omega_0.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Введем обозначения

$$0,5 \omega_0 RC = \alpha;$$

$$0,5 \omega_0 (SM - RC) = \beta.$$

Уравнения для двух линейных участков сеточной характеристики с нормированными напряжением сетки x и временем θ получают вид

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + 2\alpha \frac{dx}{d\theta} + x = 0, \quad x < -1;\tag{4.32}$$

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} - 2\beta \frac{dx}{d\theta} + x = 0, \quad x > -1.\tag{4.33}$$

Решения первого линейного уравнения будут изображаться траекториями, лежащими в области *I* фазовой плоскости слева от прямой $x = -1$, а решения второго — траекториями в области *II*, справа от прямой $x = -1$ (рис. 4.17).

Рассмотрим второе уравнение, описывающее цепь лампового генератора на линейно нарастающем участке сеточной характеристики. Записав его в виде системы двух линейных уравнений с переменными $x = x_1$ и $x'_1 = x_2$

$$\frac{dx_1}{d\theta} = x_2; \quad \frac{dx_2}{d\theta} = -x_1 + 2\beta x_2,$$

видим, что состояние равновесия расположено в начале координат: $x_1 = x_2 = 0$. Корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

Если $\beta > 0$, то корни лежат в правой полуплоскости и состояние равновесия неустойчиво. При $\beta > 1$ точка равновесия будет неустойчивым узлом, а при $0 < \beta < 1$ — неустойчивым фокусом. Далее рассматривается автоколебательный режим, представляющий наибольший интерес.

Для выполнения условия $\beta > 0$, обеспечивающего самовозбуждение колебаний, необходим выбор взаимной индуктивности, осуществляющей обратную связь, $M > RC/S$. При этом все траектории должны бы неограниченно удаляться от точки равновесия, но существует граничная линия — вертикальная прямая $x_1 = -1$ (обусловленная нелинейностью), за которой действует уравнение (4.32).

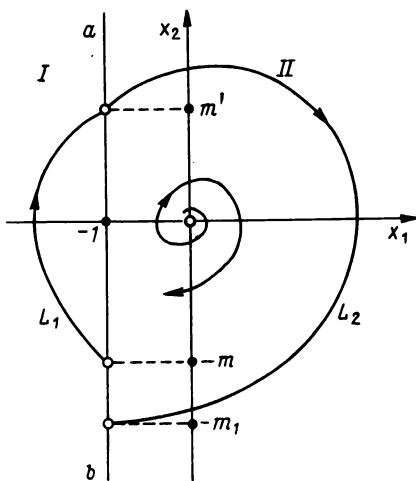


Рис. 4.17

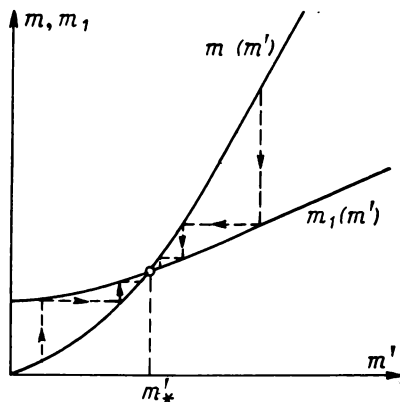


Рис. 4.18

Параметр $\alpha = \omega_0 RC/2$, входящий в это уравнение, при $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ равен $1/(2Q)$, где $Q = \sqrt{L/C}/R \gg 1$ — добротность контура. Параметр всегда положителен и $\alpha < 1$, так что состояние равновесия $x_1 = x_2 = 0$ будет устойчивым фокусом. Соответствующие траектории, лежащие в области I , будут вообще стягиваться по спирали к началу координат, но, конечно, оставаясь в пределах предписанной области I . Граничную вертикальную линию — прямую $x_1 = -1$ разделим на две части (рис. 4.17): положительную полупрямую a без контакта ($x_1 = -1, x_2 > 0$) и отрицательную полупрямую b без контакта ($x_1 = -1, x_2 < 0$). Рассмотрим траекторию L_2 в области II , представляющую собой решение уравнения (4.33) с начальной точкой $(-1, m')$ на полупрямой a . Раскручиваясь по спирали в области II , траектория попадает в более удаленную точку $(-1, -m_1)$ — на полупрямую b . Указанные соответствия точек можно рассматривать как точечное отображение T_{II} полупрямой a в полупрямую b , производимое траекториями области II .

Траектория L_1 в области I , изображающая решение уравнения (4.32) с начальной точкой $(-1, -m)$ на полупрямой b , направляясь по уменьшающейся спирали, попадает в менее удаленную точку $(-1, m')$ полупрямой a . Данные соответствия точек можно рассматривать как точечное отображение T_I нижней полупрямой b в верхнюю полупрямую a , осуществляемое траекториями области I . Изображающая точка будет перемещаться сначала по траектории L_1 в течение времени τ_1 , а затем после пересечения границы — по траектории L_2 за время τ_2 . Оба перемещения совершаются во времени последовательно. Соответственно этому результирующее точечное отображение, осуществля-

емое обеими траекториями на положительной полупрямой без контакта a , будет равно произведению $T = T_I T_{II}$. Для определения отображений T_I и T_{II} следует записать решения уравнений (4.32) и (4.33) и их производные в общем виде с начальными условиями.

Запишем решение (4.32) и его производную, определяющие траекторию L_I в области I (рис. 4.17) с начальной точкой $(-1, -m)$. Приняв для упрощения выражений обычную для лампового генератора высокую добротность контура, получим угловую частоту колебаний $\omega_d = \sqrt{1 - \alpha^2} \approx 1$ ($\alpha \ll 1$) и решение в виде

$$x = x_1 = -e^{-\alpha\theta} [\cos \theta + (m + \alpha) \sin \theta];$$

$$x' = x_2 = e^{-\alpha\theta} [-m \cos \theta + (1 + \alpha m) \sin \theta].$$

Через относительное время $\theta = \tau_1$ траектория попадает в точку $(-1, m')$ полупрямой a , так что получим

$$-1 = -e^{-\alpha\tau_1} [\cos \tau_1 + (m + \alpha) \sin \tau_1];$$

$$m' = e^{-\alpha\tau_1} [-m \cos \tau_1 + (1 + \alpha m) \sin \tau_1].$$

Из этих соотношений для искомого отображения T_I с функцией последования $m' = f(m)$ в параметрической форме имеем ($\alpha^2 \ll 1$)

$$m = (e^{\alpha\tau_1} - \cos \tau_1 - \alpha \sin \tau_1) / \sin \tau_1;$$

$$m' = (e^{-\alpha\tau_1} - \cos \tau_1 + \alpha \sin \tau_1) / \sin \tau_1. \quad (4.34)$$

При $\tau_1 = 0$ $m = 0$, а при $\tau_1 = \pi$ $m = \infty$, так что при изменении положения начальной точки от 0 до ∞ относительное время прохождения траектории изменяется в пределах от 0 до π .

Взяв отношения производных $dm/d\tau_1$ и $dm'/d\tau_1$, можно получить выражение первой производной от функции последования следующего вида:

$$\frac{dm}{dm'} = \frac{1 - e^{\alpha\tau_1} (\cos \tau_1 - \alpha \sin \tau_1)}{1 - e^{-\alpha\tau_1} (\cos \tau_1 + \alpha \sin \tau_1)}. \quad (4.35)$$

Эта функция при $\tau_1 = 0$ равна 1, а с увеличением τ_1 монотонно растет до $e^{\alpha\pi}$ при $\tau_1 = \pi$. Соответственно этому будет монотонно расти и функция $m = f(m')$, показанная на рис. 4.18.

Совершенно аналогично можно получить отображение T_{II} , рассматривая траекторию L_2 в области II фазовой плоскости с начальной точкой $(-1, m')$, которая, раскручиваясь по спирали, через интервал τ_2 попадает в точку $-1, -m_1$ (рис. 4.17). Снова для упрощения выражений, принимая обычную высокую добротность системы и угловую частоту

$\omega_d = \sqrt{1 + \beta^2} \approx 1$, получим для отображения T_{II} функцию последования в параметрической форме

$$m' = -e^{\beta\tau_2} [1 - e^{\beta\tau_2} (\cos \tau_2 - \beta \sin \tau_2)] / \sin \tau_2;$$

$$m_1 = -e^{-\beta\tau_2} [1 - e^{-\beta\tau_2} (\cos \tau_2 + \beta \sin \tau_2)] / \sin \tau_2.$$

Можно показать, что производная dm_1/dm' также положительна и функция последования $m_1 = f_1(m')$ монотонно возрастает (рис. 4.18). Пересечение обеих функций последования отображений T_I и T_{II} дает точку устойчивого предельного цикла. Построение диаграммы Ламорея, сходящейся в устойчивой неподвижной точке m'_* , показывает глобальную ее устойчивость: при любых начальных условиях в цепи установятся периодические колебания.

4.8. УСТАНОВИВШИЕСЯ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим некоторые особенности установившихся состояний нелинейных динамических цепей и систем. Под установившимся состоянием динамической системы, линейной или нелинейной, понимают ее асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ с ограниченными амплитудами реакций. Разность между полной реакцией, т. е. решением уравнений цепи, и установившейся реакцией представляет собой переходную составляющую, которая в устойчивой системе затухает.

Рассмотрим асимптотическое поведение решений и траекторий при $t \rightarrow \infty$ в автономных системах. Установившимся решениям здесь соответствуют траектории в виде устойчивых положений равновесия и предельных циклов, множество которых образует предельное множество. Как уже говорилось, указанные особые траектории называют аттракторами, они являются элементами притяжений всех траекторий. К каждому из них при $t \rightarrow \infty$ направлены траектории, начинающиеся в определенной области начальных условий — области притяжения установившегося решения. Границами областей являются траектории-сепаратрисы в виде неустойчивых предельных циклов и устойчивых траекторий седловых точек.

Траектории, идущие от множества начальных точек к предельному множеству, изображают переходные составляющие, по мере затухания которых решение приближается к тому или иному установившемуся состоянию.

В автономных цепях второго порядка, как отмечалось неоднократно, возможны следующие виды предельных множеств и соответствующих им установившихся состояний:

1. Устойчивые состояния равновесия — узлы и фокусы; установившимися состояниями являются постоянные реакции: токи индуктивных и напряжения емкостных элементов.

2. Устойчивые предельные циклы, которым соответствуют периодические реакции, устанавливающиеся после затухания переходных составляющих.

Решение, дающее устойчивые состояния равновесия и предельные циклы, а также соответствующие им установившиеся реакции, может быть неединственным. Какие из этих предельных траекторий и реакций будут устанавливаться, зависит от начальных условий.

В теории нелинейных дифференциальных уравнений доказывается (теорема Пуанкаре—Бендиксона), что в автономной системе, описываемой двумя уравнениями состояния, могут быть особые траектории только двух видов: положения равновесия и предельные циклы, которым соответствуют в случае их устойчивости установившиеся реакции. Других особых траекторий не должно быть. Картина здесь, следовательно, ясна: установившееся поведение автономной нелинейной системы второго порядка с детерминированными характеристиками является вполне определенным — регулярным и предсказуемым; можно ожидать либо постоянные реакции, либо периодические колебания, других решений не может быть.

Но достаточно увеличить размерность уравнений (принять $n > 2$), как оказывается возможным в дополнение к упомянутым установившимся состояниям качественно новое асимптотическое поведение, состоящее в возникновении так называемого хаотического движения или процесса. Хаотическое движение может возникать в автономных цепях, начиная с третьего порядка, а в цепях с периодическим воздействием — начиная со второго порядка.

Для получения представления об этом качественно новом явлении необходимо коснуться уравнений многомерных систем.

Нелинейная автономная цепь n -го порядка описывается системой уравнений в матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.36)$$

где \mathbf{x} , \mathbf{f} — векторы переменных состояния и нелинейных функций размерности n .

Следует сразу отметить, что исследование процессов в многомерных ($n > 2$) системах существенно усложняется, ряд вопросов теории остается нерешенным. Усложняется также геометрическое представление траекторий в многомерном пространстве. В последующем, касаясь процессов в многомерных системах, будем предполагать автономные цепи третьего порядка, а неавтономные цепи — второго порядка с одним источником переменного сигнала в виде периодической функции времени.

Уравнения состояния автономной цепи третьего порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3); & x_1(0) &= x_{10}; \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3); & x_2(0) &= x_{20}; \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3); & x_3(0) &= x_{30}.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Особые точки определяются из решения системы трех функциональных уравнений:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0; \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0; \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Пусть найденная особая точка имеет координаты x_1^* , x_2^* , x_3^* . Перенос начала координат в особую точку и линеаризация уравнений в ее окрестности дают систему

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3; \\ \dot{y}_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3; \\ \dot{y}_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3,\end{aligned}$$

где $y_i = x_i - x_i^*$ — отклонения переменных состояния от положения равновесия; $a_{ik} = \partial f_i / \partial x_k$ ($i, k = 1, 2, 3$) — значения частных производных при $x_i = x_i^*$ (в точке равновесия).

Решение этой системы линейных уравнений зависит от корней характеристического уравнения, получающегося приравниванием нулю определителя характеристической матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} - p & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - p & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - p \end{vmatrix} = p^3 + p^2 b_2 + p b_1 + b_0 = 0.$$

Корни кубического уравнения могут принимать различные значения, определяющие характер поведения траекторий в окрестности особой точки:

1. В случае трех вещественных корней одинакового знака получим узел: устойчивый при положительном знаке и неустойчивый при отрицательном знаке.

2. В случае одного вещественного и двух комплексных корней получим фокус: устойчивый, если их вещественные части отрицательны, и неустойчивый, если последние положительны. Траектории здесь будут иметь вид пространственных спиралей, направленных к положению равновесия или от него.

3. В случае различных знаков у вещественного корня и вещественной части комплексных корней получается неустойчивая сложная точка равновесия типа седло-фокус.

4. В случае трех вещественных корней неодинакового знака получается также неустойчивая особая точка типа седло-узел.

Устойчивым положениям равновесия пунктов 1 и 2 соответствуют установившиеся постоянные реакции.

Наряду с положениями равновесия в трехмерных системах могут существовать замкнутые траектории — предельные циклы, устойчивые или неустойчивые. Устойчивым предельным циклом будут соответствовать установившиеся периодические колебания — автоколебания.

Отметим некоторые особенности установившихся реакций в неавтономных нелинейных цепях, находящихся под воздействием периодических сигналов и описываемых уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (4.38)$$

Здесь векторы переменных состояния и число уравнений имеют размерность n . Время, входящее в правую часть, можно рассматривать как дополнительную $(n + 1)$ -ю переменную, приписав к системе (4.38) $(n + 1)$ -е дополнительное уравнение.

Будем предполагать действие периодического сигнала с периодом T в виде гармонической функции времени $A \cos \omega t$. В этом случае правая часть (4.38) будет периодической функцией времени с минимальным периодом T .

Удобно вместо времени вводить пропорциональную ему переменную — фазу $\theta = \omega t$, $t = \theta/\omega = \theta T/(2\pi)$ с производной по времени $\theta = \omega = 2\pi/T$. Приняв ее в качестве дополнительной переменной состояния, получим систему из $n + 1$ уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0; \\ \dot{x}_{n+1} &= 2\pi/T; & x_{n+1}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Время в правые части этой системы не входит, так что имеем автономную систему уравнений. Введение дополнительной переменной, пропорциональной времени, позволяет, как видим, свести неавтономную систему с периодическим воздействием к автономной системе за счет увеличения размерности пространства состояний на единицу.

Цепь второго порядка с гармоническим воздействием при введении дополнительной переменной $\theta = 2\pi/T$ преобразуется в автономную цепь третьего порядка, процессы в которой будут представляться траекториями в трехмерном фазовом пространстве с координатными осями x_1 , x_2 и нормальной к ним осью θ .

Перейдем к краткому рассмотрению асимптотического поведения нелинейных цепей, находящихся под воздействием гармонического сигнала. В зависимости от свойств и параметров цепей и соответствующих им уравнений, как отмечалось, возможно установление двух существенно различных видов поведения: регулярного предсказуемого состояния и нерегулярного непредсказуемого аperiodического состоя-

ния, называемого хаотическим. К траекториям, изображающим указанные установившиеся состояния (аттракторы), направляются при $t \rightarrow \infty$ траектории из начальных точек областей притяжения.

Перечислим различные виды регулярного асимптотического поведения. Отметим сразу: установившиеся состояния нелинейных цепей, подключенных к одному источнику гармонического сигнала, могут быть весьма разнообразными, так что классификация здесь затруднена. Поэтому ограничимся кратким перечислением некоторых наиболее характерных видов установившихся реакций.

Прежде всего следует отметить случай нормального поведения, когда установившаяся реакция независимо от начальных условий является периодической функцией времени, частота которой равна частоте входного сигнала. Цепи, обладающие указанным свойством, называют конвергентными (см. гл. 8). Выходная реакция отличается по форме от входного синусоидального сигнала: содержит высшие гармоники; спектр является дискретным (линейчатым) с частотами, кратными частоте входного сигнала.

В некоторых случаях периодическое установившееся решение может иметь период T' , кратный периоду T входного сигнала: $T' = kT$, имеем k -периодическое, или субгармоническое решение k -го порядка. Спектр будет также дискретным с частотами, кратными $2\pi/T' = 2\pi/(kT)$.

В общем случае нелинейной цепи возможно установление квазипериодических или почти периодических колебаний. Квазипериодическое установившееся решение состоит из суммы конечного числа m периодических решений с частотами $\omega_i = 2\pi/T_i$, отношения которых равны иррациональным числам, т. е. частоты являются несоизмеримыми. При этом частота каждой составляющей колебания получается в результате линейной комбинации m линейно независимых базисных частот $\hat{\omega}_k$:

$$\omega_i = k_1 \hat{\omega}_1 + k_2 \hat{\omega}_2 + \dots + k_m \hat{\omega}_m,$$

где k_i — целые числа.

Простейшим примером квазипериодического колебания может служить амплитудно-модулированное колебание

$$x(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t,$$

где $x_1(t)$ — периодическое модулирующее колебание с основной частотой ω_1 .

Как известно, спектр колебания здесь состоит из составляющих с комбинационными частотами $\omega_0 \pm k\omega_1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В случае несоизмеримости обеих частот получим квазипериодическое колебание с базисными частотами ω_0 и ω_1 . Это колебание получается в результате нелинейной операции — перемножения двух сигналов.

Все перечисленные установившиеся реакции в автономных и неавтономных системах с периодическим воздействием относятся к классу

регулярного детерминированного поведения, которое предсказуемо и прогнозируемо.

Траекториями в случае постоянных и периодических реакций будут устойчивые точки равновесия и замкнутые линии — предельные циклы. В случае почти периодического режима траектории располагаются в ограниченной замкнутой области вида бублика, форма которого может отличаться от круглой. Эта замкнутая область оказывается равномерно заполненной траекториями.

Перейдем теперь к краткому описанию некоторых характерных черт непериодического асимптотического поведения, называемого хаотическим.

Хаотическое движение может возникать в довольно простых по структуре цепях с сильной нелинейностью, порядок которых в случае автономных цепей $n \geq 3$, а в случае неавтономных цепей с периодическим воздействием $n \geq 2$, т. е. достаточно иметь в цепи три реактивных элемента или в неавтономном режиме — только два реактивных элемента. Следует иметь в виду, что характеристики всех элементов, а также приложенный к цепи сигнал являются вполне определенными — детерминированными. Хаотическое поведение представляет собой наиболее сложное установившееся решение нелинейной цепи, которое не может быть отнесено к рассмотренным видам установившихся движений в виде постоянных, периодических и квазипериодических состояний.

Хаотическое асимптотическое поведение состоит в том, что установившиеся ограниченные реакции детерминированной системы при действии вполне регулярного сигнала изменяются во времени нерегулярным образом, без каких-либо признаков периодичности и вообще регулярности. Реакции системы имеют явно выраженный вид шума или помехи, т. е. случайной функции времени, значения которой в последовательные моменты не связаны между собой какой-либо закономерностью, а появляются беспорядочно, случайным образом.

Установление хаотического режима означает, что детерминированная нелинейная система с регулярными характеристиками может вести себя недетерминированным случайным образом.

Спектр хаотического процесса соответственно имеет все черты спектра случайного сигнала (шума): является непрерывным и весьма широкополосным и не содержит дискретных составляющих, свойственных периодическим и квазипериодическим режимам.

Значения переменных при хаотическом движении остаются конечными. Поэтому траектории в пространстве состояний располагаются в ограниченной области. Область локализации хаотических траекторий обычно имеет очень сложную, даже причудливую форму, далекую от правильных геометрических фигур. Хаотические траектории, также очень сложной структуры, заполняют эту область неравномерно в отличие от траекторий почти периодического режима.

Очень важное и характерное свойство хаотического поведения состоит в исключительно высокой чувствительности реакций к изменению начальных условий. Достаточно ничтожно малого, трудно контролируемого отклонения начальных условий, чтобы по истечении некоторого времени реакция, вначале близкая к исходной невозмущенной реакции, стала резко отличной от нее. Отсюда следует вывод: реакция хаотических систем непредсказуема, так же как непредсказуемо поведение случайной системы. Соответственно направленные от близких начальных точек траектории через некоторое время разойдутся настолько, что не будет никакой связи, или корреляции, между ними.

Хаотические процессы в различных нелинейных системах относятся к очень сложным явлениям в современной науке. Аналитическое исследование их невозможно. Даже приближенное качественное решение уравнений по упрощенным моделям наталкивается на большие трудности. Поэтому основными методами исследования хаоса являются численный анализ с применением ЭВМ и эксперимент на моделях. Как правило, необходимо совместное применение обоих методов с привлечением приближенного качественного исследования отдельных этапов на упрощенных моделях. Трудности качественного анализа с помощью траекторий связаны также со сложностью их представления в многомерном фазовом пространстве.

Приведем в качестве примера схему предложенной Л. Чуа простой автономной цепи третьего порядка, в которой наблюдается хаотическое поведение (рис. 4.19, а). Схема состоит из трех линейных реактивных элементов (двух емкостных C_1 , C_2 и индуктивного L) и двух резистивных элементов — линейного и нелинейного. Нелинейный резистивный элемент является активным с характеристикой $i = g(u)$, управляемой напряжением (рис. 4.19, б) и реализуемой с помощью схемы из двух биполярных транзисторов или одного операционного усилителя.

Существование хаотического поведения рассматриваемой автономной цепи доказано численным моделированием на ЭВМ установившихся

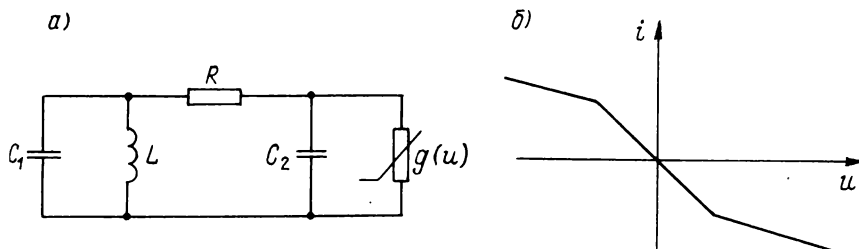


Рис. 4.19

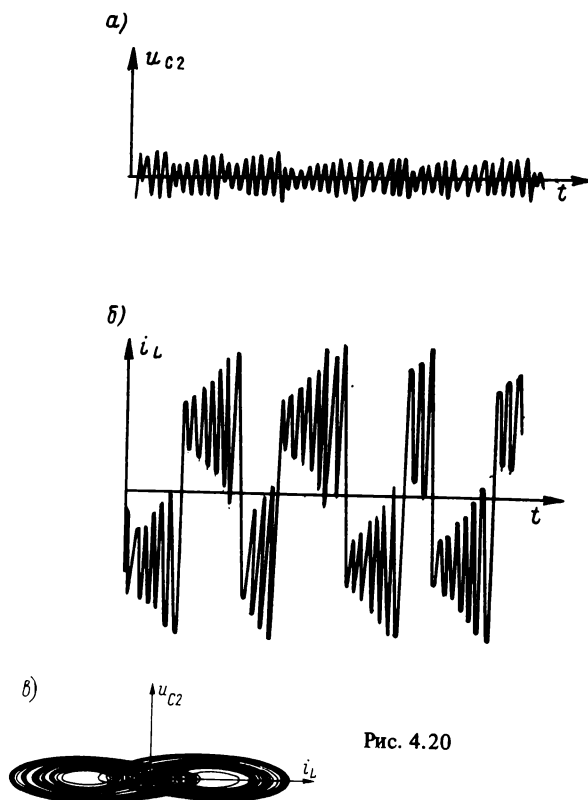


Рис. 4.20

режимов, а также экспериментально — снятием с экрана осциллографа кривых изменения переменных состояния (напряжений на емкостях и тока в индуктивности), а также вычислением проекций фазовых траекторий на плоскости u_{C1} , i_L и u_{C2} , i_L . На рис. 4.20, а, б приведены осциллограммы [26] изменения напряжений на емкости C_2 и тока в индуктивности, а на рис. 4.20, в — проекция траекторий на плоскость i_L , u_{C2} . Как видно, между мгновенными значениями переменных i_L и u_{C2} почти нет взаимной корреляции, что и приводит к хаотическим траекториям.

Со временем происходит непрерывное накопление траекторий, которые заполняют целые области со сложной поверхностью. Распределение траекторий внутри области получается неравномерным. Некоторые стадии рассматриваемой схемы допускают приближенное качественное исследование [26].

Примером простейшей неавтономной цепи, в которой возможно установившееся хаотическое движение, может служить цепь из индук-

Существуют различные пути перехода к установлению хаотического процесса. Один из путей состоит в применении каскада бифуркаций — последовательных бифуркаций при изменении параметров автономных или неавтономных цепей. Бифуркации после ряда шагов удвоения периодов установившихся регулярных колебаний или нарастания их на единицу приводят к хаосу. При последующих бифуркациях происходит подавление хаоса и снова установление периодических колебаний; после нескольких шагов нарастания периода колебаний снова возникает хаос. Далее процесс может повторяться и одномерная бифуркационная диаграмма будет состоять из перемежающихся полос ("окон") регулярного поведения с удвоением или добавлением периода колебаний и хаотических полос — прослойки между периодическими окнами. С нарастанием параметра происходит быстрое сужение указанных полос.

Для упомянутого выше неавтономного контура с диодом при выборе в качестве параметра частоты питающего напряжения бифуркационная диаграмма схематически представлена на рис. 4.21. В качестве переменной x принята амплитуда напряжения на диоде. На первом интервале изменения параметра имеем одно установившееся колебание с периодом T_1 , равным периоду напряжения источника. При значении параметра (частоты) a_1 происходит удвоение периода: $T_2 = 2T_1$ и появляются две ветви устойчивого периодического решения с удвоенным периодом. В зависимости от начальных условий установится одно из этих колебаний. В точке a_2 период снова удваивается: $T_4 = 4T_1$ и далее процесс удвоения периода будет продолжаться с резко уменьшающимися интер-

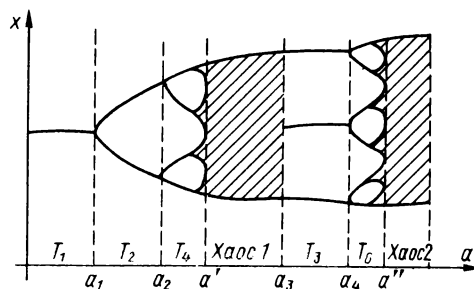


Рис. 4.21

валами между бифуркациями, которые становятся неразличимыми и практически стягиваются в точку. В результате последовательного удвоения периода в некоторой критической точке a' теряется устойчивость колебаний и устанавливается первый хаотический режим, который сохраняется до значения параметра a_3 . В этой точке происходит подавление хаоса и снова устанавливается регулярное колебание, но с периодом $T_3 = 3T_1$, которое в следующей точке переходит в колебание с периодом $T_6 = 6T_1$. Во второй критической точке a'' снова устанавливается хаотический режим и далее процесс перемежаемости периодических окон и хаотических прослоек будет продолжаться при уменьшающихся интервалах наступления бифуркационных значений параметра.

Существование хаотического поведения в детерминированных простых системах получило признание пару десятилетий тому назад и сразу вызвало очень большой интерес как в математике, так и во многих областях науки и техники, включая электронику и теорию цепей. Наличие хаотического процесса в корне изменяет существовавшее представление, что поведение детерминированной системы является вполне определенным и регулярным и, следовательно, предсказуемым и прогнозируемым. Оказалось, что установившаяся реакция детерминированной системы при действии регулярного сигнала может вести себя недетерминированным случайным образом и быть непредсказуемой.

Наличие хаотического поведения показывает, что нет непроницаемой границы между детерминированными и недетерминированными системами. В детерминированной системе возможно существование перемежающихся регулярного и хаотического установившихся режимов, переходящих друг в друга при изменениях параметров.

Можно говорить о глубокой внутренней связи, существующей между упорядоченным и хаотическим поведением детерминированных нелинейных систем.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

5.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вопросы возникновения и устойчивости периодических режимов, установление формы, частоты и амплитуды колебаний имеют первостепенное значение в теории нелинейных цепей. Как отмечено в пре-

дыдущей главе, периодическое поведение нелинейных цепей может быть многообразным в отличие от поведения линейных цепей. В автономных линейных цепях с постоянными параметрами периодический режим возникает только в консервативных цепях из идеальных реактивных элементов за счет начальных токов и напряжений. В неавтономных линейных цепях с гармоническим воздействием установившийся режим является также гармоническим с частотой, равной частоте входного сигнала.

Как отмечалось, в автономных нелинейных цепях наряду с установившимися свободными несинусоидальными колебаниями в консервативных системах без потерь возникают периодические автоколебательные режимы в диссипативных (с потерями) системах. В неавтономных же цепях, находящихся под воздействием одного гармонического сигнала, могут возникнуть периодические режимы с периодом, равным или кратным (субгармоники) периоду входного сигнала. В зависимости от свойств цепи возможны почти периодические и непериодические колебания. Особые режимы могут возникнуть в резонансных и синхронизируемых системах. Если же нелинейная цепь находится под воздействием нескольких периодических сигналов, то картина установившегося состояния резко усложняется.

В связи со сказанным затруднительно да и не имеет практического смысла давать классификацию всех возможных видов периодических реакций нелинейных цепей.

Точное аналитическое исследование различных периодических и почти периодических режимов в нелинейных цепях невозможно. Возможно лишь приближенное аналитическое решение для довольно ограниченного, но часто встречающегося класса задач. При этом требуется соблюдение следующих условий:

1. Цепи — в основном второго порядка, автономные или неавтономные, с одним источником гармонического сигнала.

2. Нелинейный элемент цепи имеет несильно выраженную нелинейность с монотонно нарастающей характеристикой, которую можно учесть некоторым малым параметром.

3. В дифференциальное уравнение второго порядка нелинейная часть входит в виде отдельного слагаемого, представляющего собой рациональную функцию переменной, ее производной и времени. Малый параметр μ , характеризующий нелинейность, входит множителем в нелинейное слагаемое.

Следовательно, предстоит рассмотрение периодического и почти периодического режима в системах второго порядка, описываемых уравнениями вида

$$\ddot{x} + \omega_0 x = \mu f(x, \dot{x}, t). \quad (5.1)$$

Уравнения второго порядка вида (5.1) описывают поведение доволь-

но большого класса нелинейных колебательных систем, широко применяемых на практике. К этому виду уравнений можно отнести, в частности, уравнение (3.19) Ван-дер-Поля генератора высокочастотных колебаний на триоде, уравнение (3.13) Дуффинга простого колебательного контура с нелинейной емкостью и т. д.

Если малый параметр, учитывающий нелинейность, $\mu = 0$, то получим уравнение линейной системы второго порядка без потерь, например контура из индуктивности и емкости, в свободном режиме с уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.2)$$

Решением этого уравнения является гармоническая функция

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (5.3)$$

Если параметр, учитывающий нелинейность, $\mu \ll 1$ не равен нулю, то следует искать решение (5.1), которое будет отличаться от гармонической функции. Принимается, что отличие искомого решения от гармонического при малом параметре будет небольшим. Решение ищется разложением в ряд по степеням малого параметра. Коэффициенты ряда, которые должны быть периодическими функциями времени, определяются подстановкой ряда в уравнение. Но при большом числе членов ряда возникают большие трудности в определении коэффициентов, это заставляет ограничиваться небольшим числом членов разложения, что, конечно, снижает точность анализа.

Существует ряд методов приближенного аналитического нахождения периодического и почти периодического решения уравнения (5.1), называемых методами малого параметра. К ним можно отнести метод возмущения, метод усреднения и метод гармонической линеаризации. В нашу задачу не входит достаточно подробное изложение указанных методов, получивших довольно полное освещение в специальных трудах [8, 11]. Ограничимся кратким изложением лишь основных, начальных сведений и понятий о методах малого параметра, которые могут облегчить более подробное ознакомление с ними по литературным источникам.

5.2. МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ

Метод возмущений, предложенный А. Пуанкаре, применяется для получения приближенного периодического решения уравнений состояния содержащих малый параметр нелинейности. Правая часть уравнений предполагается состоящей из суммы линейного и нелинейного слагаемых, причем малый параметр нелинейности входит в нелинейные слагаемые в виде множителя. Система из двух уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X_1(x, y) + \mu X_2(x, y); \\ \dot{y} &= Y_1(x, y) + \mu Y_2(x, y).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Суть метода состоит в следующем. Положив $\mu = 0$, получают из линейной системы начальное, или порождающее, решение $x_0(t)$ и $y_0(t)$. При малом $\mu > 0$ искомые периодические решения разлагаются в ряды по степеням μ в окрестности начальных решений:

$$\begin{aligned}x(t, \mu) &= x_0(t) + x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + \dots \\ y(t, \mu) &= y_0(t) + y_1(t)\mu + y_2(t)\mu^2 + \dots\end{aligned}\tag{5.5}$$

Коэффициенты $x_k(t)$, $y_k(t)$ в разложениях должны быть периодическими функциями времени, причем при $k > 0$ их можно рассматривать как поправки к начальным решениям или как возмущения, вызванные нелинейным параметром. С увеличением μ требуется большее число поправок — членов разложения.

Следует иметь в виду, что с изменением μ в уравнениях автономных систем период колебаний также изменяется и его необходимо определять.

Разложения (5.5) с намеченным числом членов подставляются в исходную систему (5.4), и приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях μ в левой и правой частях. Получающиеся при этом системы уравнений имеют рекуррентный вид. Решение системы уравнений для $\mu = 0$ дает нулевое приближение.

Рассмотрим основные положения метода возмущения на примере неавтономной цепи последовательного колебательного контура высокой добротности с нелинейной емкостью, присоединенного к источнику синусоидального сигнала $u = A \cos \omega t$. Будем полагать частоту внешнего сигнала близкой к резонансной частоте линейаризованного контура $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$, где C_0 — значение емкости на начальном участке ее характеристики. При $\omega \approx \omega_0$ получается наиболее интересный режим со скачкообразными изменениями напряжений и токов, свойственными свободным процессам.

В соответствии с приведенным предварительным соображением о превалировании свободного процесса над вынужденным порождающее решение примем совпадающим со свободными колебаниями. Для обеспечения этого режима вынужденная реакция должна быть малой, что может быть достигнуто выбором малой амплитуды приложенного к цепи внешнего сигнала. Процессы в контуре, следовательно, будут происходить в окрестности свободных колебаний линейаризованного контура, и разложение искомого решения должно производиться в окрестности этих колебаний.

Процессы в рассматриваемом контуре описываются уравнением Дуффинга (3.13), которое приведем здесь, приняв для упрощения вы-

кладок и с учетом высокой добротности контура равным нулю слагаемое с первой производной, которое учитывает потери:

$$\ddot{x} + \alpha_1 x - \mu \alpha_3 x^3 = A \cos \omega t,$$

где x — нормированное значение заряда.

Введем множителем параметр нелинейности в нелинейное слагаемое, включающее в себя напряжение источника; последнее должно обеспечить принятое доминирование свободного процесса вблизи резонансной частоты. Исследуемое уравнение получит вид

$$\ddot{x} + \alpha_1 x = \mu (\alpha_3 x^3 + B \cos \tau). \quad (5.6)$$

Искомое периодическое решение будем находить в виде ряда по степеням малого параметра

$$x(t, \mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + \dots \quad (5.7)$$

Коэффициенты ряда должны быть периодическими функциями; реализация этого требования представляет наиболее трудную часть решения. Для упрощения выкладок ограничимся линейными членами разложения (5.7):

$$x(t, \mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu. \quad (5.8)$$

Подстановка этого ряда в (5.6) приводит к линейным уравнениям, решения которых дают аperiodические, неограниченно нарастающие члены вида $t^k \cos t$ и $t^k \sin t$, называемые секулярными и не соответствующие периодическому решению. Необходимо, следовательно, учесть другие зависимости, приводящие к периодическому решению, не содержащему секулярных членов. Из физических соображений очевидно: с увеличением амплитуды напряжения среднее значение нелинейной емкости будет уменьшаться, что будет приводить к увеличению собственной частоты контура ω . Для учета указанной зависимости ω от амплитуды A квадрат резонансной частоты контура представим линейными членами ряда

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu g_1(A). \quad (5.9)$$

Если теперь подставить (5.8) и (5.9) в исходное уравнение (5.6), то получим

$$\ddot{x}_0 + \mu \ddot{x}_1 = -x_0 \omega^2 - \mu [x_1 \omega^2 - x_0 g_1(A) + b_3 x_0^3] + \mu B \cos \omega t. \quad (5.10)$$

При $\mu = 0$ имеем порождающее уравнение

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x = 0, \quad (5.11)$$

решение которого дает при начальных условиях: для $t = 0$ $x_0(0) = A$; $\dot{x}_0(0) = 0$

$$x_0 = A \cos \omega t. \quad (5.12)$$

Из (5.10) при учете (5.11) для первой поправки имеем уравнение

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = g_1(A)x_0 - b_3 x_0^3 + A \cos \omega t. \quad (5.13)$$

Подставив сюда решение (5.11), получим

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \left[g_1(A)x_0 - \frac{3}{4} b_3 A^3 + B \right] \times \\ \times \cos \omega t - \frac{1}{4} b_3 A^3 \cos 3\omega t. \quad (5.14)$$

Первое слагаемое правой части может быть секулярным членом, для устранения которого необходимо принять

$$g_1(A) = \frac{3}{4} b_3 A^2 - \frac{U}{A}. \quad (5.15)$$

Если данное условие выполнимо, то решение (5.14) для первой поправки имеет вид

$$x_1 = - [b_3 A^3 / (32 \omega^3)] (\cos \omega t - \cos 3\omega t). \quad (5.16)$$

Искомое полное решение будет равно сумме (5.12) и (5.16); оно содержит основную гармонику с частотой источника и третью гармонику. Добавление новых членов ряда и новых поправок привело бы к повышению точности и к дополнительным гармоникам в решении, но при этом существенно возросли бы трудности анализа.

5.3. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

Метод решения нелинейных уравнений второго порядка с малым параметром нелинейности вида (5.1), называемый методом усреднения или медленно меняющихся амплитуд, был предложен Ван-дер-Полем, обоснован и развит Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым.

При нулевом значении параметра нелинейности уравнение (5.1), как указывалось, обращается в линейное уравнение консервативной (без потерь) системы второго порядка (5.2). Решение и его первая производная будут гармоническими функциями времени (принято $\omega_0 = 1$):

$$x = A \cos(t + \theta); \\ y = \dot{x} = -A \sin(t + \theta). \quad (5.17)$$

При $\mu > 0$, но малом принимается, что решение изменится, но так, что получит форму колебаний той же частоты $\omega = 1$, однако с медленно изменяющимися во времени амплитудой $A = A(t)$ и начальной фазой

$\theta = \theta(t)$. Предполагается, следовательно, что реакция системы, описываемой (5.1), будет иметь вид синусоидального колебания с модулированными амплитудой и фазой. При этом предполагается, что модулирующие функции $A(t)$ и $\theta(t)$ изменяются настолько медленно, что в пределах одного периода их приращения малы и колебание можно считать гармоническим. Искомое решение, следовательно, принимается в виде

$$x = A(t) \cos [t + \theta(t)] = A(t) \cos \psi(t), \quad (5.18)$$

где $\psi(t) = t + \theta(t)$.

Производная решения

$$y = \dot{x}(t) = \dot{A}(t) \cos [t + \theta(t)] - A(t) [1 + \dot{\theta}(t)] \sin [t + \theta(t)]. \quad (5.19)$$

Если с учетом медленного изменения амплитуды и фазы принять следующее допущение:

$$\dot{A}(t) \cos [t + \theta(t)] - A(t) \dot{\theta}(t) \sin [t + \theta(t)] = 0,$$

то производная получит такой же вид, как в (5.17), но с переменными амплитудой и фазой:

$$y = \dot{x}(t) \approx A(t) \sin [t + \theta(t)] = A(t) \sin \psi(t). \quad (5.20)$$

Поскольку общий вид функции решения известен: он принят в виде (5.18) — задача состоит в том, чтобы вывести уравнения, из которых можно определить амплитуду и начальную фазу колебаний. Возведя (5.18) и (5.20) в квадрат и суммируя, а также деля (5.20) на (5.18), имеем $A^2 = x^2 + y^2$;

$$\psi(t) = \arctg (y/x). \quad (5.21)$$

Дифференцируем оба выражения по времени и подставляем выражения x и y , а также их производные из системы уравнений (5.18) и (5.20). В результате получаем

$$\begin{aligned} \dot{A} &= (x\dot{x} + y\dot{y})/A = -(\mu \sin \psi) f(A \cos \psi, -A \sin \psi); \\ \dot{\psi} &= \frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{A^2} = 1 - \left(\frac{\mu}{A} \cos \psi \right) f(A \cos \psi, -A \sin \psi). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Так как $\dot{\psi} = 1 + \dot{\theta}$, то последнее уравнение можно записать относительно производной начальной фазы

$$\dot{\theta}(t) = - \left(\frac{\mu}{A} \cos \psi \right) f(A \cos \psi, -A \sin \psi). \quad (5.23)$$

Точное решение получившейся системы двух нелинейных уравнений (5.22) невозможно. Поэтому для определения амплитуды и

фазы прибегают к приближенному решению на основе усреднения решения в пределах одного периода, равного $T = 2\pi$, с учетом малого изменения амплитуды и фазы колебаний за один период.

При усреднении от мгновенных значений переходим к средним за период колебаний значениям переменных и их производных. Медленное изменение амплитуды и фазы позволяет с достаточной точностью ограничиваться их дискретными значениями через период колебаний, а не в каждый момент времени, а это резко упрощает анализ.

Усреднение в пределах одного периода, производимое интегрированием функций от $t = 2\pi k$ до $t = 2\pi(k+1)$, дает приращение амплитуды и фазы, которые приближенно могут быть заменены производными. При интегрировании в пределах одного периода начальные фазы в аргументах $\psi = t + \theta(2\pi k)$ синусов и косинусов можно отбросить. В соответствии с указанными допущениями для производных средних значений амплитуды и фазы получим

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{A}_{\text{cp}}(t) = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin t) f(A \cos t, -A \sin t) dt; \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}_{\text{cp}}(t) = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{t}{A}\right) f(A \cos t, -A \sin t) dt.\end{aligned}\tag{5.24}$$

После интегрирования получается система двух уравнений первого порядка, не содержащих времени и называемых укороченными. Укороченные уравнения являются уравнениями автономной системы, решение которых намного проще, чем решение исходных уравнений. На основе качественных соображений можно выявить характерные особенности поведения системы. В частности, по особым точкам, получаемым приравниванием нулю правых частей, и анализу их устойчивости можно судить о наличии установившихся колебаний.

Приближенное определение периодического режима рассмотрим на примере уравнения Ван-дер-Поля (3.19) высокочастотного генератора на триоде. Запишем его в виде системы уравнений состояния с нормированной угловой частотой ($x = u_1$; $y = \dot{x}$)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= -x + \mu(1 - x^2)y.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Подставим в эти уравнения полученные ранее переменную состояния (5.18) и ее производную (5.20). После некоторых преобразований получаем систему двух уравнений относительно производных:

$$\begin{aligned}\dot{A}(t) \cos \psi - \dot{\theta}(t) A(t) \sin \psi &= 0; \\ \dot{A}(t) \sin \psi + \dot{\theta}(t) A(t) \cos \psi &= \mu A f(A, \psi),\end{aligned}\tag{5.26}$$

где

$$f(A, \psi) = (1 - A^2/4) \sin \psi - (A^2 \sin \psi)/4.$$

Определитель системы $\Delta = A(t)$. Искомые производные амплитуды и начальной фазы

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= \mu f(A, \psi) \sin \psi; \\ \dot{\theta}(t) &= \mu f(A, \psi) \cos \psi. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Произведем усреднение: перейдем к средним за период колебания значениям производных. Интегрирование (5.27) в пределах периода с учетом $f(A, \psi)$ дает

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\text{ср}} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \psi) \sin \psi \, d\psi = \frac{1}{2} \mu A \left(1 - \frac{A^2}{4} \right); \\ \dot{\theta}_{\text{ср}} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \psi) \cos \psi \, d\psi = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Получены два независимых друг от друга укороченных уравнения для амплитуды и фазы огибающей колебаний, которая не содержит синусоидального заполнения: оно исключено в результате усреднения. Из простого качественного анализа полученных автономных уравнений можно вывести основные свойства решения. Из равенства нулю производной от начальной фазы (второе уравнение) следует постоянство фазы $\theta = \theta_0$, где θ_0 — начальная фаза.

Приравняв нулю правую часть уравнения, получим состояния равновесия, представляющие собой амплитуды установившихся колебаний, равные $A = 0$ и $A = 2$. Для оценки устойчивости состояний равновесия необходимо определить знак производной правой части, первого уравнения (5.28), определяемой выражением

$$0,5 \mu \left(1 - \frac{3A^2}{4} \right).$$

Первая точка равновесия ($A = 0$), в которой производная, равная $0,5 \mu > 0$, положительна, неустойчива, а вторая точка ($A_2 = 2$) с отрицательной производной, равной $-\mu < 0$, устойчива.

Если решить первое уравнение (5.28), то можно получить уравнение огибающей колебаний, т. е. медленно изменяющейся амплитуды напряжения сетки. Интегрирование уравнения при начальном условии $A = A_0$ для $t = t_0$ дает

$$A = A_0 [1 - 0,25 A_0^2 (1 - e^{\mu t})]^{-1/2} e^{\mu t/2}. \quad (5.29)$$

Если согласно (5.18) умножить эту медленно изменяющуюся амплитуду на $\cos(t + \theta)$, то получим истинное напряжение сетки в виде модулированного по (5.29) высокочастотного колебания.

Из (5.29) видно, что амплитуда колебаний, или огибающая, нарастает от A_0 при $t = 0$ вначале, когда экспонента в квадратных скобках невелика, приблизительно по $\exp(\mu \tau/2)$. Постепенно скорость нарастания снижается и достигает нуля при $t \rightarrow \infty$, когда амплитуда становится равной $A = 2$ в установившемся колебательном режиме. Амплитуда не зависит от начального напряжения, что свойственно автоколебательным процессам.

На фазовой плоскости установившемуся колебанию будет соответствовать устойчивый предельный цикл, к которому будут направлены по спирали траектории как изнутри при $A_0 < 2$, так и снаружи при $A_0 > 2$. При $A_0 \approx 0$ траектории будут направлены от неустойчивой точки равновесия. При этом нарастание амплитуды вначале будет происходить по экспоненте с постоянной времени $\tau = 2/\mu$, обратно пропорциональной малому параметру. Чем больше μ , тем быстрее нарастание колебаний. Если произвести денормирование параметра согласно (3.18а), то

$$\tau = \frac{2}{\mu} = \frac{2}{a/\omega_0} = \frac{2}{\omega_0 SM - 1/Q}.$$

Увеличение добротности контура приводит к уменьшению постоянной времени и времени нарастания колебаний, что также характерно для автоколебаний: как известно, в нелинейном колебательном контуре увеличение добротности увеличивает время установления колебаний.

В приведенном изложении принятая в качестве приближенного решения гармоническая функция с медленно изменяющимися амплитудой и фазой представлена в полярной форме (5.18). Эту форму решения, предложенную Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, удобно применять для анализа автономных систем.

Для получения почти периодического решения уравнений неавтономных систем удобнее представление в прямоугольной форме вида $x(t) = X(t) \cos t + Y(t) \sin t$.

Для этой формы решения, предложенной Ван-дер-Полем, с помощью усреднения в пределах периода можно также свести задачу анализа неавтономной системы к более легкому анализу автономной системы с применением фазового портрета.

5.4. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Метод гармонической линеаризации, предложенный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, является основой частотного метода анализа, который в приближенном виде может применяться для анализа установившихся колебаний в некоторых нелинейных системах. Установив-

шие колебания в автономных или неавтономных цепях с синусоидальным воздействием должны быть близки по форме к гармоническим колебаниям. Метод позволяет использовать анализ с помощью комплексных амплитуд и таких важных понятий, как комплексное сопротивление и комплексная функция передачи, которые очень широко применяются при анализе линейных цепей в установившемся синусоидальном режиме.

Для применения метода гармонической линеаризации требуется выполнение следующих условий: 1) в неавтономной цепи при действии на входе гармонического сигнала установившаяся периодическая реакция должна иметь тот же период, что и входное воздействие; 2) основная гармоника реакции, частота которой равна частоте воздействия в случае неавтономной цепи или определяется параметрами автономной цепи, должна доминировать над остальными гармониками. Для выполнения данного условия необходимо, чтобы нелинейность в системе была несильной, а кроме того, чтобы частотные характеристики линейной части ослабляли высшие гармоники.

При выполнении приведенных условий можно пренебречь всеми высшими гармониками в выходной реакции и учитывать только основную гармонику. Это означает, что нелинейная система, реакция которой содержит бесконечное число гармоник, заменяется приближенной эквивалентной нелинейной системой, реакция которой представляет собой гармоническую функцию

$$f_2(t) = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t, \quad (5.30)$$

равную первой гармонике реакции исходной системы. Очень важным здесь является то, что амплитуда и фаза реакции (5.30) или коэффициенты A_1 и B_1 зависят от амплитуды A входного сигнала:

$$A_1 = f_1(A); \quad B_1 = f_2(A).$$

В соответствии с принятым положением, что переменные цепи — как воздействие, так и все реакции — являются синусоидальными функциями одной и той же частоты, можно ввести комплексные амплитуды переменных и применить метод комплексных амплитуд. Имеем комплексные амплитуды

$$\dot{F}_1 = A; \quad \dot{F}_2 = a_1 - jb_1 = F_2 e^{j\varphi}. \quad (5.31)$$

Функция передачи эквивалентной нелинейной системы, равная отношению комплексных амплитуд реакции и воздействия, зависит как от частоты, так и от амплитуды входного сигнала:

$$H(j\omega, A) = \frac{\dot{F}_2}{\dot{F}_1} = |H| e^{j\psi}. \quad (5.32)$$

Для анализа установившегося периодического режима методом гармонической линеаризации необходимо иметь выражения комплексных входной и передаточной функций нелинейных элементов. Рассмотрим примеры определения указанных функций.

1. Пусть характеристика нелинейного резистивного элемента представлена нечетным кубическим полиномом

$$i = a_1 u + a_3 u^3. \quad (5.33)$$

При действии гармонического напряжения $u = U_m \cos \omega t$ ток в элементе будет содержать наряду с первой также третью гармонику:

$$i = \left(a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 \right) \cos \omega t + \frac{a_3}{4} U_m^3 \cos 3\omega t. \quad (5.34)$$

Отбрасываем третью гармонику, предполагая ее намного меньше первой, и принимаем ток равным

$$i \approx \left(a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 \right) \cos \omega t.$$

Взяв отношение комплексных амплитуд тока и напряжения, получим комплексную проводимость нелинейного резистивного элемента

$$Y_R = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 U_m^2. \quad (5.35)$$

Эквивалентная проводимость зависит от амплитуды напряжения на элементе, а именно возрастает ($a_3 > 0$) при ее увеличении. На рис. 5.1 изображены характеристика элемента, график синусоидального напряжения и графики тока — точный и приближенный — при учете только первой гармоники. Принятие в реакции только первой гармоники означает замену нелинейной характеристики линейной для каждого значения амплитуды напряжения: в этом и состоит сущность гармонической линеаризации.

2. Рассмотрим нелинейный индуктивный элемент, характеристика которого в некотором интервале тока представлена нечетным полиномом

$$\psi = L (i - b i^3). \quad (5.36)$$

Напряжение на элементе

$$u = \frac{d\psi}{dt} = L \left(\frac{di}{dt} - 3bi^2 \frac{di}{dt} \right).$$

При $i = I_m \cos \omega t$ производная тока

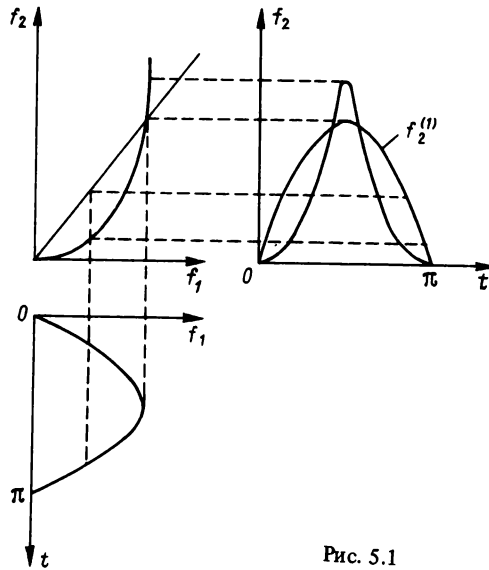


Рис. 5.1

$$\frac{di}{dt} = -\omega I_m \sin \omega t,$$

так что напряжение

$$u = \omega L I_m \left[\left(\frac{3bI_m^2}{4} - 1 \right) \sin \omega t + \frac{3}{4} b I_m^2 \sin 3\omega t \right]$$

содержит также третью гармонику. Принимаем в расчет только первую гармонику тока и для эквивалентного комплексного сопротивления индуктивного элемента получаем

$$Z_L = \frac{\dot{U}_m^{(1)}}{\dot{I}_m} = \omega L \left(1 - \frac{3}{4} b I_m^2 \right) e^{j\pi/2}. \quad (5.37)$$

Здесь появляется зависимость сопротивления не только от амплитуды, но и от частоты, а кроме того, фаза $\varphi = 90^\circ$, т. е. первая гармоника напряжения опережает синусоидальный ток элемента на 90° .

3. Пусть характеристика нелинейного емкостного элемента представлена нечетным полиномом относительно заряда

$$u = (q + dq^3)/C. \quad (5.38)$$

При $q = Q \cos \omega t$ и, следовательно, токе

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega Q \cos(\omega t + \pi/2)$$

напряжение элемента (5.38) примет вид

$$u = \frac{Q}{C} [1 + 3dI_m^2/(4\omega^2)] \cos \omega t + \frac{dQ^3}{4C} \cos 3\omega t.$$

Взяв отношение комплексной амплитуды первой гармоники напряжения к комплексной амплитуде тока, получим эквивалентное комплексное сопротивление нелинейного емкостного элемента

$$Z_C = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{1}{\omega C} [1 + 3dI_m^2/(4\omega^2)] e^{-j\pi/2}. \quad (5.39)$$

Комплексное сопротивление зависит как от амплитуды, так и от частоты и имеет фазу $\varphi = -\pi/2$, т. е. первая гармоника напряжения отстает от синусоидального тока на 90° . Аналогичным образом можно определить эквивалентные комплексные функции любых других элементов. Приближенное аналитическое задание характеристик в виде полиномов существенно облегчает нахождение комплексной амплитуды первой гармоники реакции, так как при этом не требуется разложения в ряд Фурье. Если характеристика задана в виде графика или кусочно-линейного представления, то сначала необходимо по заданному косинусоидальному сигналу определить форму выходной реакции и по формуле коэффициентов ряда Фурье вычислить амплитуду первой гармоники.

Если нелинейные элементы цепи представлены эквивалентными комплексными сопротивлениями, то с помощью метода комплексных амплитуд, который вообще применяется для анализа линейных цепей, можно определить функцию передачи эквивалентной линеаризованной системы (5.32)

Искомая комплексная амплитуда первой гармоники выходной реакции

$$\dot{F}_2^{(1)}(j\omega, A) = H(j\omega, A)F_1(j\omega). \quad (5.40)$$

Все сказанное справедливо, конечно, при выполнении исходных предпосылок: существования в анализируемой системе периодического режима с частотой, равной частоте входного сигнала, и относительной малости высших гармоник. Последнее условие нередко обеспечивается фильтрующими свойствами линейной части системы.

Во многих практических системах, особенно в системах с обратными связями, указанные условия соблюдаются, и поэтому метод гармонической линеаризации находит широкое применение. Этому способствуют важные достоинства метода: исключительная простота

расчетов, возможность анализа систем с высоким порядком линейной части, оценки устойчивости систем и возможности автоколебаний и т. д.

Недостаток метода состоит в невозможности указать границы его применения, а также оценить погрешности расчетов.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

6.1. ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ВОЛЬТЕРРЫ

Как известно [25], линейные цепи обладают тем замечательным свойством, что полностью характеризуются реакцией на одно воздействие. Это находит отражение в формуле интеграла наложения

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (6.1)$$

Здесь $h(t)$ — импульсная характеристика цепи, т. е. реакция цепи на воздействие в виде единичной импульсной функции $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях; $x(t)$ — произвольное воздействие; $y(t)$ — реакция на это воздействие при нулевых начальных условиях.

Иногда в (6.1) берут другие пределы интегрирования. Если считать, как это обычно принято, что $h(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$, то из (6.1) получаем

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (6.2)$$

Формула (6.1) находит широкое применение при анализе переходных и установившихся режимов. Ее можно использовать и в задачах синтеза. В этом случае заданными считаются $x(t)$ и $y(t)$, а функция $h(t)$ определяется из уравнения (6.1). Важную роль играет соотношение (6.1) и при решении задач идентификации, когда для сложных цепей $h(t)$ определяют экспериментально, после чего формула (6.1) дает математическую модель исследуемой цепи.

Возникает вопрос, существует ли для нелинейных цепей какая-либо аналогичная формула, дающая явную зависимость выходного сигнала от входного воздействия. В общем случае ответ на этот вопрос будет, видимо, отрицательным. Однако можно выделить один класс нелинейных цепей, для которых такая формула существует. Она имеет следующий вид:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{r=1}^k x(t - \tau_r) d\tau_r; \quad t > 0. \quad (6.3)$$

Здесь, как и ранее, $x(t)$ — воздействие, а $y(t)$ — реакция цепи на воздействие при нулевых начальных условиях.

Очевидно, что если сохранить в (6.3) только первый член ряда, то получим интеграл наложения для линейной цепи.

Ряд (6.3) называется функциональным рядом Вольтерры, а многомерные функции $h_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$ — ядрами Вольтерры k -го порядка, $k = 1, 2, \dots$. Эти ядра не зависят от внешних воздействий и полностью определяются свойствами самой цепи. Они обращаются в нуль, если хотя бы одна из переменных τ_1, \dots, τ_k отрицательна. Ядра являются симметричными, т. е. перемена местами любых двух переменных τ_r и τ_l не меняет значения ядра.

Для применения формулы (6.3) в практических задачах необходимо ответить на следующие вопросы:

1. Для каких классов цепей связь между реакциями и воздействиями может быть представлена в виде (6.3)?

2. При каких амплитудах внешних воздействий ряд (6.3) сходится?

3. Как по заданной цепи определить ядра Вольтерры?

Трудность ответа на первый вопрос обусловлена тем, что математические условия существования ряда (6.3) — аналитичность оператора, отображающего входные сигналы в выходные [29] — не так-то просто и перевести на язык теории цепей.

Для цепей с сосредоточенными параметрами показано (см. например, [12]), что если цепи состоят из линейных и нелинейных элементов R , L , C и линейных управляемых источников, причем нелинейные характеристики элементов описываются полиномами, то достаточными условиями для существования ряда (6.3) являются:

1. Ограниченность амплитуды внешних воздействий достаточно малым числом.

2. При отсутствии воздействия ($x(t) = 0$) реакция $y(t)$ также равна нулю при нулевых начальных условиях и это положение равновесия устойчиво, т. е. цепь не будет самовозбуждаться.

Для цепей с распределенными параметрами условия существования ряда (6.3) более сложны. Некоторые вопросы построения рядов для таких цепей изложены, например, в [29].

Требование малости амплитуды внешних воздействий в физическом смысле эквивалентно тому, что нелинейные свойства цепи проявляются не очень сильно. Поэтому говорят, что цепи, для которых имеет место представление (6.3), должны работать в слабонелинейном режиме.

Трудность ответа на второй вопрос обусловлена тем, что в практических расчетах удастся получить информацию только о нескольких первых ядрах ряда Вольтерры. Поэтому наибольший интерес представляли бы оценки, позволяющие определить радиус сходимости ряда (6.3), т. е. верхнюю грань амплитуд $x(t)$, при которых ряд сходится, непосредственно по заданной цепи, без вычисления ядер. Для некоторых классов цепей такие оценки в настоящее время имеются.

Приведем для примера одну из них [12]. На рис. 6.1 изображена цепь, представляющая собой последовательное соединение линейного двухполюсника 1 и нелинейного резистора 2. К цепи приложено напряжение $u(t)$ (воздействие), и требуется выяснить возможность представления реакции $i(t)$ в виде сходящегося ряда (6.3) при нулевых начальных условиях в линейном двухполюснике.

Пусть вольт-амперная характеристика нелинейного резистора имеет вид

$$u_n = \sum_{k=2}^n a_k i^k. \quad (6.4)$$

Здесь отсутствуют постоянный и линейный члены, так как предполагается, что постоянный член отнесен к источнику $u(t)$, а линейный член — к линейному двухполюснику 1.

Пусть проводимость линейного двухполюсника равна $Y(s)$, а оригинал этой функции (импульсная характеристика) равен $h(t)$. Тогда для того чтобы $i(t)$ можно было выразить через $u(t)$ в виде сходящегося ряда (6.3), достаточно выполнения следующих условий:

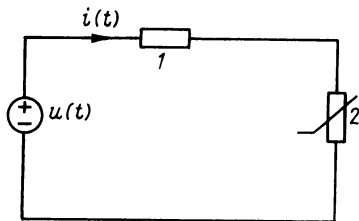


Рис. 6.1

$$1) \int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \lambda < \infty;$$

$$2) \lambda \sum_{k=2}^n |a_k| k < 1;$$

$$3) \max_{0 \leq t < \infty} |u(t)| \leq 0,5/\lambda.$$

При всей простоте подобных оценок они не всегда удобны для практического использования, так как сильно меняются от одного класса цепей к другому, требуют иногда значительных вычислений и зачастую дают заниженные значения радиуса сходимости ряда.

Поэтому в инженерной практике часто применяется другой, нестрогий, но достаточно простой критерий сходимости ряда (6.3) и оценки погрешности усечения ряда. Для этого вычисляют первые k ядер Вольтерры (способы вычисления ядер обсуждаются ниже) и предполагают, что реакция цепи с достаточной точностью аппроксимируется первыми k членами ряда Вольтерры. Для оценки погрешности вычисляют еще одно-два ядра ($k+1$ и $k+2$) и рассчитывают $(k+1)$ -й и $(k+2)$ -й члены ряда Вольтерры. Если сумма этих членов по абсолютному значению мала по сравнению с максимумом абсолютного значения предыдущих членов, то аппроксимация k членами ряда Вольтерры считается достаточной. В противном случае увеличивают k и повторяют процедуру. Если и это не привело к уменьшению $(k+1)$ -го и $(k+2)$ -го членов ряда, то можно высказать предположение, что при заданной амплитуде внешнего воздействия ряд расходится. Такой подход хотя и дает изредка "осечки", однако оправдывается своей простотой.

Перейдем к третьей проблеме. Как для заданной цепи определить ядра Вольтерры?

Если схема или уравнения цепи заданы, это позволяет найти точные аналитические выражения для ядер Вольтерры теоретически любого порядка. Более того, имеется возможность представить ряд (6.3) в другой, более простой форме, где вообще не требуется вычислять ядра. Соответствующая методика изложена в следующем параграфе.

Если же параметры цепи известны приближенно или вообще неизвестны либо уравнения цепи слишком сложны, то применяют экспериментальные способы определения ядер Вольтерры. Эти способы описаны в главе, посвященной идентификации и диагностике нелинейных цепей (глава 7).

6.2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Для цепей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, существует эквивалентная, но значительно более простая и удобная в практических расчетах форма записи ряда (6.3). Это так называемые ряды Вольтерры – Пикара, или коротко ВП-ряды [12].

Введем следующие определения.

Определение 1. Пусть $X(s)$ и $Y(s)$ – изображения по Лапласу функций $x(t)$ и $y(t)$ соответственно и для этих изображений имеет место соотношение

$$Y(s) = H(s)X(s). \quad (6.5)$$

Тогда будем говорить, что для оригиналов $x(t)$ и $y(t)$ имеет место соотношение

$$y(t) = H(p)x(t), \quad (6.6)$$

и называть $H(p)$ одночленным оператором первой степени или линейным оператором.

Таким образом, $H(p)$ — оператор, отображающий пространство функций $x(t)$, преобразуемых по Лапласу, в пространство функций $y(t)$, также преобразуемых по Лапласу.

Смысл перехода от (6.5) к (6.6) состоит в том, что в (6.6) функции $x(t)$ и $y(t)$ записаны во временной области, что очень важно для нелинейных цепей, где затруднительно работать с изображениями.

Хотя аналог выражения (6.5) во временной области уже рассматривался — формула (6.1), однако формула (6.6) представляет собой более алгебраизированную форму записи, что позволяет заметно упростить дальнейшие выражения.

Пример 6.1. Пусть линейная электрическая цепь имеет передаточную функцию $\dot{H}(s) = \frac{1}{1+s}$. Тогда в соответствии с определением

1 можно утверждать, что реакция цепи $y(t)$ и воздействие $x(t)$ связаны соотношением

$$y(t) = \frac{1}{1+p} x(t). \quad (6.7)$$

Формулы (6.6) и (6.7) не дают возможности непосредственно вычислить $y(t)$ по заданной функции $x(t)$. Для этого следует воспользоваться (6.5) или (6.1) либо другими аналогичными алгоритмами.

С помощью линейного оператора $H(p)$, определенного в (6.6), можно конструировать нелинейные операторы, необходимые для построения функциональных рядов.

Определение 2. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ принадлежат пространству функций, преобразуемых по Лапласу. Будем говорить, что $x(t)$ и $y(t)$ связаны одночленным оператором второй степени, если

$$y(t) = H_1(p) [H_2(p)x(t)H_3(p)x(t)], \quad (6.8)$$

где $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ — линейные операторы.

Вообще будем говорить, что $x(t)$ и $y(t)$ связаны одночленным оператором n -й степени ($n > 1$), если

$$y(t) = H(p) [V^{(k)}(p)x(t)V^{(n-k)}(p)x(t)], \quad (6.9)$$

$k \geq 1, n - k \geq 1$;

$H(p)$ — линейный оператор; $V^{(k)}(p)$ и $V^{(n-k)}(p)$ — одночленные операторы k -й и $(n - k)$ -й степени соответственно.

Пример одночленного оператора третьей степени самого общего вида:

$$y(t) = H_1(p) \{ H_2(p) [H_3(p)x(t)H_4(p)x(t)] H_5(p)x(t) \} ; \quad (6.10)$$

здесь $H_1(p), \dots, H_5(p)$ — линейные операторы.

Чтобы показать, как вычислить $y(t)$ в нелинейных операторах, рассмотрим для примера одночленный оператор второй степени (6.8). Вначале вычисляем функции $\varphi_2(t) = H_2(p)x(t)$ и $\varphi_3(t) = H_3(p)x(t)$. Расчет, как указывалось выше, может быть выполнен на основе формулы (6.5) или (6.1) либо по другим аналогичным алгоритмам. Затем вычисляем

$$f(t) = \varphi_2(t)\varphi_3(t).$$

Наконец, находим

$$y(t) = H_1(p)f(t). \quad (6.11)$$

Определение 3. Функциональным полиномом Вольтерры — Пикара (ВП-полиномом) называется выражение вида

$$y(t) = \sum_{k=1}^n V_k(p)x(t). \quad (6.12)$$

Здесь $V_k(p)$ — одночленные операторы.

Степенью ВП-полинома называется максимальная степень одночленных операторов $V_k(p)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

При $n \rightarrow \infty$ (6.12) переходит в функциональный ряд Вольтерры — Пикара.

Роль рядов Вольтерры — Пикара состоит в том, что: а) решение уравнений нелинейных цепей может быть при определенных условиях представлено в виде ВП-ряда; б) этот ряд тождествен классическому функциональному ряду Вольтерры (6.3); в) ВП-ряды в отличие от классических рядов Вольтерры содержат только одномерные передаточные функции, что существенно упрощает вычисление.

Рассмотрим процедуру решения уравнений электрических цепей в виде ВП-рядов.

Вернемся к цепи, изображенной на рис. 6.1. Составим уравнение цепи на языке ВП-полиномов. Если реактивные элементы, входящие в линейный двухполюсник, имеют начальные запасы энергии, то эти ненулевые начальные условия можно учесть в соответствии с теоремой Тевенена, включив последовательно с двухполюсником дополнительный источник напряжения. Двухполюсник при этом будет иметь нулевые начальные условия. Предположим, что такой учет ненулевых начальных условий уже выполнен и дополнительный источник объединен с источником входного напряжения. Пусть операторное сопротивление линейного двухполюсника равно $Z(s)$. Тогда напряжение на

двухполюснике согласно (6.6) можно записать как $Z(p)i(t)$, а уравнение всей цепи по второму закону Кирхгофа примет вид

$$Z(p)i(t) + \sum_{k=2}^n a_k [i(t)]^k = u(t). \quad (6.13)$$

Решим уравнение (6.13) методом последовательных приближений (методом итераций Пикара). Первая итерация получается, если считать напряжение на нелинейном резисторе равным нулю, т. е. если вместо (6.13) рассмотреть уравнение

$$Z(p)i_1(t) = u(t). \quad (6.14)$$

Отсюда

$$i_1(t) = \frac{1}{Z(p)} u(t) = Y(p)u(t). \quad (6.15)$$

Для получения r -й итерации перепишем уравнение (6.13) в виде

$$i(t) = -Y(p) \sum_{k=2}^n a_k [i(t)]^k + Y(p)u(t). \quad (6.16)$$

Обозначая r -ю итерацию через $i_r(t)$, получим следующий алгоритм

$$i_r(t) = -Y(p) \sum_{k=2}^n a_k [i_{r-1}(t)]^k + Y(p)u(t), \quad (6.17)$$

$r = 2, 3, \dots$

К примеру, при $r = 2$

$$i_2(t) = -Y(p) \sum_{k=2}^n a_k [Y(p)u(t)]^k + Y(p)u(t). \quad (6.18)$$

Таким образом, $i_2(t)$ представляет собой ВП-полином n -й степени, а k -е слагаемое под знаком суммы — одночленный оператор k -й степени, $k = 2, 3, \dots, n$.

Если в (6.17) устремить r к бесконечности, то получим функциональный ряд Пикара, который при определенных условиях сходится к решению уравнения (6.13).

Однако описанная процедура получения ряда имеет некоторые, чисто технические, недостатки. Дело в том, что в r -й итерации (6.17) не все члены ВП-полинома войдут при $r \rightarrow \infty$ в функциональный ряд и с этой точки зрения они являются "лишними". Как показано в [12], можно строить усеченные итерации Пикара [назовем их $i_{rs}(t)$], обладающие тем свойством, что вся r -я усеченная итерация полностью войдет

в функциональный ряд. Способ построения очень прост. Первая усеченная итерация совпадает с обычной первой итерацией $i_1(t) = Y(p)u(t)$. Для получения r -й усеченной итерации $i_{rs}(t)$, $r \geq 2$, в выражение (6.17) вместо $i_{r-1}(t)$ подставляют $i_{r-1,s}(t)$ и сохраняют только одночленные операторы степени не выше r . Так, например,

$$i_{2s}(t) = -Y(p)a_2[Y(p)u(t)]^2 + Y(p)u(t); \quad (6.19)$$

$$i_{3s}(t) = Y(p)u(t) - Y(p)a_2[Y(p)u(t)]^2 + Y(p) \cdot 2a_2^2 \times \\ \times \{Y(p)[Y(p)u(t)]^2 Y(p)u(p)\} - a_3 Y(p)[Y(p)u(t)]^3. \quad (6.20)$$

Такой способ построения приводит к тому, что r -я усеченная итерация полностью совпадает с отрезком функционального ряда Пикара, содержащим все члены ряда первой, второй, . . . , r -й степени. Следовательно, из (6.20) можно, например, сделать вывод, что функциональный ряд Пикара для тока $i(t)$ содержит два одночленных оператора третьей степени [последние слагаемые правой части (6.20)].

Если ставить вопрос о связи функциональных рядов Пикара с функциональными рядами Вольтерры, то ответом на него служит следующее утверждение [12].

Если для тока $i(t)$ существует функциональный ряд Вольтерры (6.3), то он совпадает с функциональным рядом Пикара, полученным из (6.17) при $r \rightarrow \infty$. При этом k -е слагаемое ряда Вольтерры совпадает с суммой одночленных ВП-полиномов k -й степени ряда Пикара.

На основе сказанного можно, например, пользуясь выражением (6.20) и принимая во внимание, что оно описывает отрезок ряда Пикара, сделать следующий вывод. Если ряд Вольтерры для $i(t)$ существует и имеет вид

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{r=1}^k u(t - \tau_r) d\tau_r,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 = Y(p)u(t); \quad (6.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ = -Y(p)a_2[Y(p)u(t)]^2; \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \prod_{r=1}^3 u(t - \tau_r) d\tau_r = \\
& = Y(p) \cdot 2a_2^2 \left\{ Y(p) [Y(p)u(t)]^2 Y(p)u(t) \right\} - Y(p)a_3[Y(p)u(t)]^3.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Таким образом, если, например, возникает необходимость вычислить ядра $h_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$, то для этого можно воспользоваться формулами, подобными (6.21)–(6.23). Детали таких расчетов будут изложены ниже.

Так как функциональный ряд Пикара содержит ВП-полиномы и совпадает с рядом Вольтерры, то целесообразно его называть рядом Вольтерры–Пикара или ВП-рядом.

Все сказанное без принципиальных изменений распространяется на случай более сложных цепей, содержащих несколько нелинейных элементов (не обязательно резистивных).

Для примера рассмотрим цепь с двумя нелинейными элементами: резистором и индуктивностью (рис. 6.2, а). Полагая, что в цепи нулевые начальные условия, преобразуем цепь по теореме Тевенена (рис. 6.2, б), включив последовательно с нелинейными элементами источники напряжения $H_1(p)u(t)$ и $H_2(p)u(t)$. Здесь $H_1(p)$ и $H_2(p)$ – линейные операторы, определяемые линейной цепью. Пусть для линейного четырехполюсника на рис. 6.2, б существует матрица сопротивлений $Z(s)$. Тогда уравнение цепи относительно токов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ можно записать на языке ВП-полиномов так:

$$\begin{aligned}
Z_{11}(p)i_1(t) + Z_{12}(p)i_2(t) + \varphi[i_1(t)] &= H_1(p)u(t); \\
Z_{21}(p)i_1(t) + Z_{22}(p)i_2(t) + p\psi[i_2(t)] &= H_2(p)u(t).
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Здесь φ и ψ – функции, описывающие вольт-амперную и вебер-амперную характеристики соответственно. Будем считать эти функции полиномами:

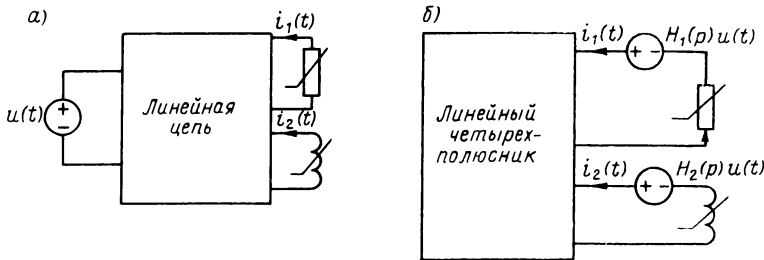


Рис. 6.2

$$\varphi(i_1) = \sum_{k=2}^n a_k i_1^k; \quad \psi(i_2) = \sum_{k=2}^m b_k i_2^k. \quad (6.25)$$

Причины, по которым суммы в (6.25) берутся начиная с $k=2$, уже обсуждались выше.

Первая итерация Пикара для решения уравнений (6.24) получается, если в них положить равными нулю нелинейные члены. Пометив первую итерацию индексом 1 сверху, получим

$$\begin{aligned} Z_{11}(p)i_1^{(1)}(t) + Z_{12}(p)i_2^{(1)}(t) &= H_1(p)u(t); \\ Z_{21}(p)i_1^{(1)}(t) + Z_{22}(p)i_2^{(1)}(t) &= H_2(p)u(t). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Если уже найдена r -я итерация ($r \geq 1$), то $(r+1)$ -я находится из уравнений

$$\begin{aligned} Z_{11}(p)i_1^{(r+1)}(t) + Z_{12}(p)i_2^{(r+1)}(t) + \sum_{k=2}^n a_k [i_1^{(r)}]^k &= H_1(p)u(t); \\ Z_{21}(p)i_1^{(r+1)}(t) + Z_{22}(p)i_2^{(r+1)}(t) + p \sum_{k=2}^m b_k [i_2^{(r)}]^k &= H_2(p)u(t). \end{aligned} \quad (6.27)$$

На практике, как уже отмечалось выше, целесообразно пользоваться усеченными итерациями Пикара, которые получаются, если в развернутой записи r -й итерации сохранить те и только те слагаемые, которые являются ВП-полиномами не выше r -й степени.

Столь же просто (в идейном плане) вычисляются итерации Пикара и для случая, когда цепь описывается уравнениями переменных состояния в форме Коши

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varphi_1(t); \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varphi_2(t); \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varphi_n(t).$$

Пусть нелинейные функции $f_k(x_1, \dots, x_n)$ ($k=1, 2, \dots, n$) являются полиномами, не содержащими линейных и постоянных членов. Пусть, кроме того, уравнения (6.28) преобразованы так, что $x_1(0) = x_2(0) = \dots = x_n(0) = 0$. Для этого, как известно, достаточно прибавить к функциям $\varphi_k(t)$ соответствующие импульсные функции.

[illegible][illegible][illegible]

Каковы преимущества ВП-рядов по сравнению с классическими рядами Вольтерры? Это, во-первых, более простой способ построения ряда. Во-вторых, вместо вычисления многомерных интегралов ВП-полиномы сводят расчеты к многократному вычислению одномерных интегралов свертки или к одномерным преобразованиям Лапласа и Фурье. В-третьих, линейные операторы, входящие в ВП-полиномы, достаточно просто выражаются, как это видно из (6.19), (6.20) и

(6.27), через параметры цепи, что имеет немаловажное значение в задачах синтеза, моделирования и идентификации.

6.3. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Если отрезок функционального ряда построен, то он дает приближенное аналитическое представление реакции цепи через воздействие и параметры цепи. Полученная при этом формула универсальна в том смысле, что справедлива при любых внешних воздействиях, лишь бы амплитуды их обеспечивали сходимость ряда. В противоположность этому многие другие методы приближенных аналитических решений ограничены узким конкретным классом внешних воздействий.

Аналитические формулы особенно удобны на стадии предварительного проектирования электронной аппаратуры, когда нужно иметь возможно больше качественной информации о зависимости решений от внешних воздействий и свойств цепи.

При фиксированных значениях параметров цепи и внешних воздействий приближенные аналитические выражения дают возможность и численного расчета реакций. Вряд ли такой подход может конкурировать по точности с широко применяемыми численными методами, однако, если высокая точность не требуется, то применение функциональных рядов может иметь ряд преимуществ.

Во-первых, расчет ВП-полиномов включает в себя довольно простые и широко применяемые процедуры, входящие в стандартное матобеспечение. Во-вторых, если инженера интересует только одна реакция цепи, то метод функциональных рядов позволяет вычислить лишь ее, в то время как, скажем, при решении уравнений переменных состояния приходится вычислять все переменные. Это увеличивает время расчета, загружает память машины и может уменьшить точность расчета. В-третьих, функциональные ряды удобнее применять при сложных внешних воздействиях, например при полигармонических или модулированных сигналах. Традиционные численные методы в этих случаях связаны со значительными трудностями.

Проиллюстрируем этапы расчета цепи конкретным примером. На рис. 6.3 изображена цепь, в которой нелинейный резистор имеет вольт-амперную характеристику, уравнение которой

$$u_n = i^3.$$

Параметры цепи приведены в относительных единицах. Проводимость линейной части цепи (линейного двухполюсника) $Y(s) = \frac{s+1}{s+2}$.

Воспользовавшись выражением (6.20), запишем отрезок ВП-ряда для тока $i(t)$, содержащий ВП-полиномы до третьей степени включительно,

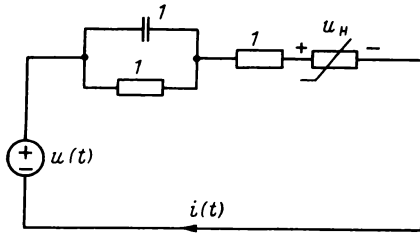


Рис. 6.3

$$i(t) \approx Y(p)u(t) - Y(p) [Y(p)u(t)]^3$$

или в развернутом виде

$$i(t) \approx \frac{p+1}{p+2} u(t) - \frac{p+1}{p+2} \times \left[\frac{p+1}{p+2} u(t) \right]^3. \quad (6.31)$$

Рассмотрим различные варианты расчета правой части (6.31).

Если $u(t)$ записывается в простой аналитической форме, то (6.31) можно вычислить точно, воспользовавшись преобразованием Лапласа.

Пусть, к примеру, $u(t) = A e^{-3t}$, $A > 0$. Найдем $f_1(t) = \frac{p+1}{p+2} u(t)$.

Для этого перейдем к изображению по Лапласу

$$F_1(s) = \frac{1+s}{2+s} \cdot \frac{A}{3+s},$$

откуда

$$f_1(t) = -A e^{-2t} + 2A e^{-3t}.$$

Теперь найдем

$$\left[\frac{p+1}{p+2} u(t) \right]^3 = [f_1(t)]^3 = -A^3 e^{-6t} + 6A^3 e^{-7t} - 12A^3 e^{-8t} + 8A^3 e^{-9t} = f_2(t).$$

Изображение $f_2(t)$ равно

$$F_2(s) = A^3 \left(\frac{-1}{s+6} + \frac{6}{s+7} - \frac{12}{s+8} + \frac{8}{s+9} \right).$$

Находим оригинал функции $\frac{s+1}{s+2} F_2(s)$ [последнее слагаемое правой части (6.31)], после чего окончательно получаем

$$i(t) = -A e^{-2t} + 2A e^{-3t} - A^3 \left(-\frac{13}{140} e^{-2t} - \frac{5}{4} e^{-6t} + \frac{36}{5} e^{-7t} - 14 e^{-8t} + \frac{64}{7} e^{-9t} \right). \quad (6.32)$$

Для того чтобы определить, при каких значениях A это выражение дает удовлетворительную точность, можно подставить $i(t)$ в уравнение цепи

$$\frac{1}{Y(p)} i(t) + i^3 = u(t) \quad (6.33)$$

и оценить невязку между правой и левой частями уравнения.

Пусть, к примеру, требуется, чтобы при любом $t > 0$ невязка по абсолютному значению не превышала $0,05A$. Тогда непосредственным расчетом можно убедиться, что это условие достаточно при любом $A \leq 0,35$.

Другой способ оценки точности был описан в предыдущем параграфе. Он состоит в вычислении следующего члена ВП-ряда [в (6.31) это будет полином 5-й степени] и оценке абсолютного значения этого члена. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат: указанный член меньше 5% абсолютного значения максимального линейного члена, если $A \leq 0,359$.

Таким образом, можно утверждать, что при $A \leq 0,35$ выражение (6.32) дает удовлетворительную точность расчетов. При этом нетрудно подсчитать, что нелинейные члены в (6.32) (содержащие множитель A^3) составляют при любом $t > 0$ по абсолютному значению не более 10% абсолютного значения линейных членов, т. е. рассматриваемая цепь действительно является слабонелинейной, что типично при применении функциональных рядов. Практика расчетов цепей показывает, что для сходящихся функциональных рядов нелинейные члены в среднем не превышают по абсолютному значению 10–30% максимального линейного члена. Из (6.32) видно, что уже при простом внешнем воздействии окончательное аналитическое выражение для реакции получается довольно длинным. При более сложных воздействиях целесообразно рассчитывать отдельные слагаемые ВП-ряда. Здесь наиболее распространены два алгоритма. Рассмотрим их для нашего примера. Первый алгоритм основан на теореме свертки. Находим оригинал функции $Y(s)$ (импульсную характеристику линейной части цепи):

$$Y(s) = \frac{1+s}{2+s} \rightarrow \delta(t) - e^{-2t} = h(t),$$

где $\delta(t)$ — импульсная функция.

Отсюда первый член в (6.31)

$$Y(p)u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = u(t) - \int_0^t e^{-2\tau}u(t-\tau)d\tau.$$

Интеграл свертки в этом выражении вычисляется по программе, входящей в стандартное матобеспечение.

Возведем найденную функцию $Y(p)u(t)$ в куб, обозначив результат через $f(t)$. Вычислим второе слагаемое в (6.31):

$$\frac{p+1}{p+2} \left[\frac{p+1}{p+2} u(t) \right]^3 = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau = f(t) - \int_0^t e^{-2\tau} f(t-\tau) d\tau.$$

Таким образом, весь расчет состоит из операций вычисления интегралов свертки, перемножения функций и суммирования.

Второй алгоритм основан на преобразовании Фурье и представляет собой следующее:

1. Вычислить преобразование Фурье (т. е. спектр) функции $u(t) \rightarrow U(j\omega)$. Оценить ширину спектра.

2. Вычислить функцию $\frac{1+j\omega}{1+j2\omega} U(j\omega)$ в конечном числе точек ω при $\omega \in \Omega$, где Ω определяется шириной спектра функции $\frac{1+j\omega}{1+j2\omega} \times U(j\omega)$.

3. Вычислить обратное преобразование по Фурье функции $\frac{1+j\omega}{1+j2\omega} \times U(j\omega)$, т. е. первое слагаемое в (6.31).

4. Возвести найденное выражение в куб, преобразовать по Фурье, умножить на $\frac{1+j\omega}{1+j2\omega}$, после чего найти обратное преобразование Фурье.

Полученное выражение даст последнее слагаемое в (6.31).

До сих пор речь шла о расчете переходного процесса. Если требуется найти установившийся режим, скажем при периодическом воздействии, не делая расчета переходного процесса, то здесь применяется алгоритм, являющийся непосредственным обобщением соответствующего алгоритма для линейных цепей.

Проследим этапы расчета на примере той же цепи. Пусть приложенное к ней напряжение имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \alpha_k). \quad (6.34)$$

Отметим, что частоты ω_k здесь могут быть произвольными, так что сюда входят модулированные и почти периодические колебания.

1. Находим установившееся значение функции $Y(p)u(t)$, которое обозначим через $u_1(t)$. Так как $Y(p)$ — линейный оператор, то расчет проводится тем же способом, что и при определении реакций линейных цепей:

$$u_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k |Y(j\omega_k)| \cos(\omega_k t + \alpha_k + \beta_k); \quad (6.35)$$

$$\beta_k = \arg Y(j\omega_k).$$

2. Возводим $u_1(t)$ в куб. Эта операция существенно зависит от конкретных частот ω_k . Если среди частот есть несоизмеримые, т. е. отношение ω_l/ω_m при $l \neq m$ есть иррациональное число (на практике рациональное число с большим числом значащих цифр), то возводить в куб следует аналитически (ограничиваясь в (6.35) конечным и возможно меньшим числом членов). Объясняется это тем, что потом будет очень трудно (если вообще возможно) снова разложить полученное выражение в тригонометрический ряд.

Если же (6.34) — периодическая функция, то можно вначале вычислить сумму (6.35), затем полученную функцию возвести в куб и результат разложить в ряд Фурье.

Следует отметить, что применение других методов (например, метода гармонического баланса) для получения спектра реакции при полигармоническом воздействии встречает серьезные вычислительные трудности. Что же касается излагаемого метода, то при воздействии вида

$$A \cos(\omega_1 t + \alpha) + B \cos(\omega_2 t + \beta)$$

современные программы позволяют рассчитать в реакции все комбинационные составляющие вида $C_{mn} \cos[(m\omega_1 + n\omega_2)t + \gamma_{mn}]$, когда m и n удовлетворяют условию

$$|m| + |n| \leq 20.$$

Все сказанное в этом параграфе преследовало цель показать использование функциональных рядов для анализа электрических цепей. Однако этим далеко не исчерпывается область применения функциональных рядов в теории электрических цепей.

Существуют задачи синтеза электрических цепей, в которых применение функциональных рядов и полиномов позволяет получить решение наиболее простым путем. К одной из таких задач относится задача компенсации нелинейных искажений. В общих чертах эта задача состоит в том, чтобы построить электрическую цепь, которая, будучи подключенной в определенных точках к исходной цепи, делала бы результирующую цепь более близкой к линейной.

На языке функциональных рядов задача может быть сформулирована так. Пусть соотношение вход-выход исходной цепи описывается функциональным рядом Вольтерры. Тогда компенсирующая цепь должна обладать такими свойствами, чтобы после подключения ее к исходной цепи соотношение вход-выход результирующей цепи могло быть записано в виде функционального ряда, в котором после первого (линей-

ного) члена сразу следует слагаемое не ниже k -го порядка ($k > 2$). Подробно этапы решения задачи описаны в главе 11.

Еще одна задача синтеза цепей, естественным образом приводящая к функциональным полиномам, относится к области формирования сигналов заданного вида при определенных входных воздействиях.

Если поставить задачу синтеза цепи, у которой под воздействием входного сигнала $x(t)$ появляется отклик $y(t)$, то такую задачу, по крайней мере, в принципе можно решить с помощью линейной цепи. Для этого, как отмечалось в начале главы, можно на основе (6.1) найти $h(t)$ и по этой функции построить линейную цепь.

Однако, если возникает задача преобразования множества входных сигналов во множество выходных

$$x(t, a) \rightarrow y(t, a),$$

где a — дискретный или непрерывный параметр, то для решения подобной задачи требуется уже нелинейная цепь. Определение свойств такой цепи и ее реализация могут быть выполнены с помощью функциональных полиномов [12].

Важную роль играют функциональные ряды и полиномы при решении задач идентификации, т. е. при построении математического оператора, описывающего соотношение вход-выход исследуемой цепи на основе тестовых испытаний. Эти вопросы излагаются в главе 7.

У читателя может сложиться впечатление, что функциональные ряды и полиномы пригодны для исследования только слабонелинейных цепей. Однако это не так. Ситуация здесь во многом аналогична проблеме аппроксимации функций степенными рядами и полиномами. Пусть $f(x)$ — аналитическая в окрестности $x = x_0$ функция. Тогда она может быть разложена в этой окрестности в сходящийся ряд Тейлора. Если радиус сходимости конечен, то любой отрезок ряда есть полином, аппроксимирующий $f(x)$ только при значениях x , удовлетворяющих условию $|x - x_0| \leq R$, где R — радиус сходимости ряда.

Однако существуют полиномы, не являющиеся отрезками указанного ряда и аппроксимирующие функцию $f(x)$ с заданной точностью на любом конечном интервале изменения x . Существование таких полиномов следует из теоремы Вейерштрасса [23].

Аналогичным образом для цепей, не являющихся слабонелинейными (т. е. для цепей, у которых соответствующие функциональные ряды являются расходящимися), можно тем не менее построить функциональные полиномы Вольтерры, с заданной точностью описывающие соотношение вход-выход. Существование таких полиномов гарантируется теоремой Фреше [29]. Подробнее эти вопросы рассматриваются в главе 7.

В заключение параграфа остановимся на вопросе, всегда ли аппарат ВП-рядов оказывается удобнее, чем аппарат классических рядов Воль-

терры? В общем случае это не так даже для цепей с сосредоточенными параметрами.

Дело в том, что не всегда легко получить в явном виде отрезок ВП-ряда. Как видно, например, из (6.30), для получения итераций Пикара необходимо для каждой итерации решить (в общем виде) систему линейных уравнений, что для цепей высокого порядка весьма затруднительно. Если же точные уравнения цепи неизвестны, то единственным способом построения функционального ряда является экспериментальный путь. На цепь подаются некоторые тестовые сигналы, измеряются реакции, и результаты используются для определения ядер Вольтерры. Естественно, что полученный таким путем функциональный ряд уже не будет ВП-рядом. Точно так же функциональные ряды для цепей с распределенными параметрами не являются ВП-рядами.

Области использования классических рядов Вольтерры и ВП-рядов, а также техника работы с ними в целом аналогичны, однако, практическое использование ВП-рядов встречает большие математические и вычислительные трудности.

Способы определения ядер Вольтерры описаны в главе 7, а здесь вкратце остановимся на вычислении реакции цепи, когда отрезок ряда Вольтерры для реакции уже построен, т. е. задано соотношение

$$y(t) \approx \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{k \text{ раз}}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{r=1}^k x(t - \tau_r) d\tau_r, \quad (6.36)$$

где $x(t)$ — заданное воздействие, $y(t)$ — реакция цепи, $h_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$ — функции, заданные, как правило, в численном виде, т. е. в дискретных точках; промежуточные значения определяются при необходимости с помощью каких-либо интерполяционных формул.

Расчет правой части (6.36) может быть выполнен как во временной области, так и в области изображений.

Для расчетов во временной области может быть использован прием, хорошо известный в теории линейных цепей и применяемый для вычисления интеграла свертки (6.1). Функцию $x(t)$ заменяем выражением, содержащим импульсные функции:

$$x(t) \rightarrow \sum_{k=0}^n x(kh) \delta(t - kh),$$

где h — шаг дискретизации, а затем подставляем это выражение в (6.36). При вычислении интегралов применяются правила интегрирования выражений, содержащих импульсные функции. Опишем, к примеру, расчет слагаемого, содержащего ядро второго порядка. От выражения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

переходим к выражению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \sum_{k=0}^n x(kh) \delta(t - \tau_1 - kh) \times \\ \times \sum_{k=0}^n x(kh) \delta(t - \tau_2 - kh) d\tau_1 d\tau_2.$$

Отсюда видно, что расчет сводится к почленному интегрированию выражения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(k_1 h) \delta(t - \tau_1 - k_1 h) x(k_2 h) \delta(t - \tau_2 - k_2 h) d\tau_1 d\tau_2$$

Интегрируя это выражение сначала по τ_1 , а затем по τ_2 , получаем, что оно равно

$$x(k_1 h) x(k_2 h) h_2(t - k_1 h, t - k_2 h). \quad (6.37)$$

Остается просуммировать (6.37) по всем k_1 и k_2 , таким, чтобы выполнялись условия

$$t - k_1 h \geq 0, \quad t - k_2 h \geq 0$$

(напомним, что ядра Вольтерры $h_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$ обращаются в нуль, если хотя бы одно из τ_i отрицательно).

Расчет (6.36) может быть выполнен в области изображений с помощью многомерных преобразований Лапласа и Фурье. Преобразование Лапласа для численного расчета сколько-нибудь сложных цепей применяется довольно редко ввиду громоздкости и поэтому ниже не приводится. Оно достаточно подробно описано, например, в [29]. Более распространенным является многомерное преобразование Фурье.

Многомерным преобразованием Фурье (изображением по Фурье) ядра $h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ называется выражение вида

$$H_k(j\omega_1, \dots, j\omega_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k e^{-j\omega_i \tau_i} d\tau_i. \quad (6.38)$$

Функцию $H_k(j\omega_1, \dots, j\omega_k)$ часто называют многомерной передаточной функцией k -го порядка.

При идентификации нелинейных систем в ряде случаев бывает проще определить эту передаточную функцию, чем ее оригинал $h_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$. Расчет реакции цепи также зачастую удобнее производить с помощью многомерной передаточной функции. Это в первую очередь справедливо для случая, когда воздействие представляет собой тригонометри-

ческий ряд и требуется найти вынужденную составляющую реакции. Опишем этапы расчета. Пусть

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{j\omega_k t}. \quad (6.39)$$

Найдем для примера значение

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (6.40)$$

(вынужденную составляющую решения), полагая, что функция $h_2(\tau_1, \tau_2)$ непосредственно не задана, но известно ее Фурье-изображение $H_2(j\omega_1, j\omega_2)$.

Подставим (6.39) в (6.40):

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{j\omega_k(t - \tau_1)} \times \\ \times \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r e^{j\omega_r(t - \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2.$$

Отсюда видно, что задача сводится к вычислению слагаемых вида

$$\varphi_{kr}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) A_k A_r e^{j\omega_k(t - \tau_1)} \times \\ \times e^{j\omega_r(t - \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2$$

и суммированию результатов

$$\varphi_{kr}(t) = e^{j(\omega_k + \omega_r)t} A_k A_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j\omega_k \tau_1} \times \\ \times e^{-j\omega_r \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = e^{j(\omega_k + \omega_r)t} A_k A_r H_r(j\omega_k, j\omega_r); \\ f_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_{kr}(t).$$

Аналогичным образом вычисляются и слагаемые ряда Вольтерры более высоких порядков.

В заключение отметим, что все изложенное в этой главе относилось лишь к случаю непрерывных (аналоговых) цепей со стационарными параметрами, одним воздействием и одной реакцией. В настоящее время вопросы применения функциональных рядов в теории цепей

успешно развиваются и для других классов цепей: дискретных, цепей с переменными параметрами, цепей с несколькими входными и выходными сигналами и т. д.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ДИАГНОСТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

7.1. ПРЕДМЕТ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ДИАГНОСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Под идентификацией в общей теории систем понимают определение вида и количественных характеристик операторов, описывающих данную систему. При этом предполагается, что на систему можно подавать определенные тестовые воздействия и измерять отклики на них. Полученная информация служит основой для приближенного построения соответствующего оператора.

Если в качестве оператора, описывающего электрическую цепь, принята ее принципиальная схема, то задачей идентификации может служить определение параметров схемы. Подобная же задача возникает при диагностике цепи, т. е. при определении неисправных элементов.

Таким образом, задачи идентификации и диагностики тесно связаны между собой и потому рассматриваются в одной главе.

Проблемы идентификации электрических цепей становятся все более актуальными по мере усложнения электрических схем, появления новых технологий и развития ЭВМ. Объясняется это следующими причинами:

1. Идентификация позволяет построить или уточнить математическую модель электрической цепи, необходимую для расчета цепи с помощью ЭВМ.

2. Идентификация, позволяя построить оператор, связывающий только входные и выходные сигналы в цепи, дает возможность существенно упростить описание цепи, исключив промежуточные, внутренние переменные.

3. Часто при разработке новых элементов или фрагментов электронных схем предприятие-изготовитель дает информацию, недостаточную для детального исследования их свойств. В этом случае идентификация является иногда единственным средством построения достаточно полной математической модели изучаемого устройства.

4. Модели, полученные с помощью идентификации, находят применение при контроле качества электронных изделий. Кроме того, как уже отмечалось выше, идентификация позволяет решать задачи диагностики электрических цепей, т. е. определения параметров цепи, значения которых отклонились от номинальных.

Для решения задач идентификации и диагностики недостаточно только тех средств, которые используются при анализе и синтезе электрических цепей. Поэтому по постановке задачи, методам решения и применяемому математическому аппарату вопросы идентификации и диагностики электрических цепей выделяются в обширную самостоятельную область исследования.

7.2. ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ПРОБЛЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ИХ РЕШЕНИИ

В настоящее время существует немало различных подходов к идентификации нелинейных цепей, решающих разные задачи. Некоторые из этих подходов пригодны для исследования только конкретных схем или узких классов схем, т. е. носят частный характер. Не имея возможности в рамках данной главы описать все подходы, остановимся только на тех, которые носят относительно универсальный характер и решают достаточно общие задачи. К таким задачам относятся:

1. Определение параметров электрических цепей, когда принципиальная схема цепи известна. В этом случае предполагаются заданными структура (топология) цепи и вид элементов в каждой ветви. Определению подлежат только количественные параметры элементов, например емкость конденсаторов, сопротивление резисторов и т. д. Тот факт, что схема цепи задана, заметно упрощает дело, так как отпадает необходимость в решении первой части общей задачи идентификации — отыскании вида оператора, связывающего переменные состояния. Электрическая схема цепи сама по себе может считаться одной из форм задания такого оператора.

Тем не менее, несмотря на указанное упрощение, задача в общем случае остается весьма сложной. В реальной цепи имеется обычно ограниченное число точек, доступных для измерения и подачи тестовых сигналов. Всегда ли можно, имея информацию, полученную измерением только в этих точках, определить все интересующие параметры цепи? Ответ на этот вопрос в общем случае будет отрицательным. Поэтому вначале приходится решить проблему корректности поставленной задачи.

Другая трудность заключается в нелинейном характере задачи. Даже если цепь линейна, параметры цепи могут входить в уравнения нелинейным образом. К примеру, передаточная функция линейной

цепи является билинейной функцией каждого из параметров цепи. Поэтому приходится решать нелинейные уравнения.

Третья трудность — в том, что решаемые уравнения часто являются плохо обусловленными, а погрешности измерений могут существенно исказить результаты. В качестве простого примера рассмотрим лестничную цепь, изображенную на рис. 7.1. Пусть требуется по результатам измерений входного напряжения и тока (u и i) определить сопротивление R , полагая, что остальные параметры цепи известны (их значения даны на схеме).

Нетрудно убедиться в том, что при изменении R от нуля до бесконечности входное сопротивление цепи изменяется не более чем на одну миллионную, поэтому погрешность измерений входных сигналов, а также погрешности в задании элементов R_k и G_k могут привести к недопустимо большим погрешностям при определении R .

Перечисленные трудности свидетельствуют, что решение рассматриваемой задачи часто требует больших усилий. Достаточно подробное описание многих относящихся сюда методов и алгоритмов для линейных (и частично нелинейных) цепей дано в [20] и здесь не приводится. Лишь некоторые из существующих подходов описаны в § 7.4 в связи с решением задач диагностики.

2. Идентификация цепи на основе построения системы уравнений, описывающих цепь. Если схема цепи задана, но неизвестны параметры элементов, то можно составить уравнение цепи непосредственно по схеме, после чего отыскивать коэффициенты уравнений. В этом случае задача очень близка к предыдущей.

Однако во многих случаях требуется составить уравнение цепи, связывающее только небольшое число переменных, чаще всего входные и выходные сигналы. Для линейных цепей можно решить эту задачу, исключив из полной системы уравнений цепи лишние уравнения и переменные. Для нелинейных цепей такое исключение невозможно и приходится применять другие подходы. Они связаны с использованием априорной информации о свойствах цепи и введением на основе этой информации гипотез о форме и структуре уравнений цепи.

3. Идентификация цепи на основе построения операторов, дающих явную зависимость выходных сигналов от входных. Получение явной аналитической зависимости выходных сигналов от входных — весьма трудная задача, так как она эквивалентна аналитическому решению системы нелинейных уравнений. Точные решения такого рода, как правило, отсутствуют, и можно говорить лишь о приближенном решении, справедли-

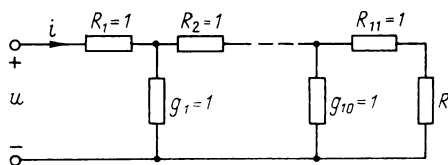


Рис. 7.1

вом для ограниченного класса входных воздействий и начальных условий. Но и такое решение получить непросто, поскольку возникают проблемы выбора формы оператора, оценки точности решения и т. д.

Зато полученные аналитические выражения обладают рядом бесспорных достоинств, так как не требуют решения нелинейных уравнений, позволяют исследовать общие свойства решений и их зависимость от параметров цепи. В дальнейшем наибольшее внимание уделено решению третьей задачи.

Следует отметить, что методы и алгоритмы решения перечисленных задач, а также применяемый математический аппарат существенно зависят от формы тестовых воздействий, используемых при идентификации.

С этой точки зрения задачи идентификации можно классифицировать следующим образом:

1. Идентификация в режиме постоянного тока.
2. Идентификация при гармонических и полигармонических воздействиях.
3. Идентификация в режиме случайных тестовых воздействий. В рамках принятого в книге детерминированного подхода такие воздействия ниже не рассматриваются.
4. Идентификация при импульсных тестовых сигналах.

7.3. МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ, ОСНОВАННЫЕ НА ПОСТРОЕНИИ ОПЕРАТОРОВ, ДАЮЩИХ ЯВНУЮ ЗАВИСИМОСТЬ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ ОТ ВХОДНЫХ

В данном параграфе рассматриваются методы идентификации, связанные с применением функциональных рядов и функциональных полиномов.

Предположим, что исследуемая цепь удовлетворяет некоторым дополнительным условиям:

1. Рассматриваются только стационарные цепи, т. е. цепи, параметры которых не зависят явно от времени.
2. Если считать, что внешние воздействия подаются на цепь при $t \geq 0$, то при $t < 0$ все токи и напряжения равны нулю. Если в реальной цепи это не так, то при $t \geq 0$ емкости и индуктивности заменяются эквивалентными схемами с дополнительными источниками. Для учета таких источников к внешним выводам цепи добавляются дополнительные пары зажимов.
3. Реакция цепи на внешние воздействия определяется однозначно при $t \geq 0$.
4. Цепь не может самовозбуждаться. В частности, если внешние воздействия при $t \rightarrow \infty$ стремятся к постоянным значениям, то и реакции цепи стремятся к постоянным значениям.

5. Цепь должна быть причинной. Это значит, что все реакции цепи равны нулю, пока равны нулю воздействия.

Отметим, что не все из перечисленных условий являются полностью независимыми.

Условие 5 кажется излишним, так как, если опыты проводятся с реальной цепью, то принцип причинности выполняется автоматически. Однако схема может представлять собой модель электрической цепи, существующей только на бумаге (или в памяти ЭВМ).

Перечисленные условия характерны для таких цепей, как тракты усилителей, фильтры, корректоры, функциональные преобразователи, выпрямители, детекторы, трансформаторы и т. д.

Идентификация резистивных цепей. Если цепи исследуются в режиме постоянного тока, то их можно считать чисто резистивными. В этом случае задача идентификации состоит в получении аналитического выражения, не содержащего производных и интегралов и дающего явную зависимость выходного сигнала от входного.

Подавая на вход цепи постоянные воздействия в заданном диапазоне амплитуд и измеряя реакции (также являющиеся постоянными), получают таблицу чисел (или график), дающую зависимость входного сигнала от выходного. Для получения соответствующей аналитической зависимости можно применить известные алгоритмы аппроксимации функций. Наиболее распространенными являются здесь аппроксимация полиномами, сплайн-функциями [2], аппроксимация Паде [7] и др.

При всей идейной простоте задачи ее практическая реализация требует решения ряда проблем: оценки погрешности измерений, выбора формы тестового воздействия (не всегда самым удобным является постоянное воздействие), оценки точности аппроксимации и др. Сведения о решении этих вопросов читатель может почерпнуть из книги [30].

Идентификация цепей в слабонелинейном режиме. Как уже отмечалось в главе 6, если нелинейные элементы в электрической цепи описываются аналитическими зависимостями, то при определенных ограничениях на свойства цепи и достаточно малой амплитуде входного воздействия $x(t)$ реакцию $y(t)$ можно представить в виде сходящегося функционального ряда Вольтерры (ФРВ):

$$y[x(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{k \text{ раз}}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{r=1}^k x(t - \tau_r) d\tau_r. \quad (7.1)$$

Такое представление обладает многими достоинствами. Оно дает аналитическую зависимость выходного сигнала от входного, оно универсально, изучение ядер $h_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$ позволяет определить зависимость $y(t)$ от свойств цепи и подсказывает методы синтеза нелинейных цепей и т. д. Поэтому вопросам идентификации цепей на основе

ФРВ уделяется в литературе значительное внимание, хотя нужно постоянно помнить, что такая идентификация возможна лишь в слабонелинейном режиме, т. е. при малых амплитудах входных воздействий.

Задача идентификации заключается в выборе формы тестовых воздействий $x(t)$ и разработке методики, которая позволяла бы по измеренным реакциям $y(t)$ определить ядра $h_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$ в (7.1). Обычно ограничиваются отысканием очень небольшого числа ядер (первых двух, трех, четырех), так как, во-первых, высшие слагаемые в (7.1) дают, как правило, малый вклад в общую сумму, а во-вторых, вычислительные трудности при расчете ядер более высокого порядка резко возрастают.

Наряду с отысканием ядер $h_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$ не меньшее внимание уделяют и задаче определения Фурье-изображений ядер $H_k(j\omega_1, \dots, j\omega_k)$.

Прежде чем описывать методику определения ядер, остановимся на двух проблемах, с которыми в первую очередь сталкивается исследователь. Одна из них заключается в выборе амплитуды входных воздействий. Она должна быть такой, чтобы ряд (7.1) сходиллся. Однако исследуемая цепь представляет собой "черный ящик", поэтому априорная информация о радиусе сходимости ряда, как правило, отсутствует. Следовательно, единственным выходом является экспериментальное определение амплитуды входного воздействия. Для этого вначале на цепь подают настолько малое по амплитуде воздействие, чтобы в реакции практически не отмечались нелинейные эффекты. Например, при чисто гармоническом воздействии реакция не должна содержать нулевую и высшую гармоники. Затем увеличивают амплитуду входного воздействия до тех пор, пока измерительная аппаратура не будет уверенно отмечать те нелинейные составляющие реакции, которые необходимы для идентификации нескольких первых ядер Вольтерры. Таким образом, желательно работать в районе нижнего предела измерительной аппаратуры.

Вторая проблема состоит в том, что при идентификации ядра Вольтерры k -го порядка ($k > 1$) существенное влияние на точность оказывают соседние члены ряда Вольтерры. Это влияние тем более опасно, что, как было сказано, сами амплитуды нелинейных слагаемых ряда Вольтерры должны быть малы. Поэтому необходимо применять специальные приемы, позволяющие минимизировать указанное влияние. Опишем один из этих приемов [16]. Его идея заключается в конструировании из реакций цепи такого выражения, которое было бы с определенной точностью равно k -му слагаемому ряда Вольтерры (7.1).

Если $x(t)$ — воздействие на цепь, а $y(t)$ — реакция, то будем записывать ряд Вольтерры (7.1) в виде

$$y(t) = y[x(t)].$$

Пусть α — произвольное вещественное число. Тогда реакция цепи на воздействие $\alpha x(t)$ равна

$$y[\alpha x(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \times \\ \times \prod_{r=1}^k x(t - \tau_r) d\tau_r. \quad (7.2)$$

Предполагаем α таким, чтобы этот ряд сходиллся. Подадим на вход цепи поочередно воздействия $\alpha_1 x(t), \alpha_2 x(t), \dots, \alpha_n x(t)$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — различные вещественные числа, не равные нулю) и измерим соответствующие реакции $y[\alpha_r x(t)]$, $r = 1, \dots, n$. Образует выражение

$$F_m[x(t)] = \sum_{r=1}^n a_r y[\alpha_r x(t)], \quad (7.3)$$

где a_r — вещественные числа, которые выбираются из следующих соображений. Если подставить в (7.3) вместо $y[\alpha_r x(t)]$ его выражение из (7.2), то получим

$$F_m[x(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^n a_r \alpha_r^k \right) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \times \\ \times \prod_{q=1}^k x(t - \tau_q) d\tau_q. \quad (7.4)$$

Выберем числа a_r таким образом, чтобы в правой части (7.4) обратились в нуль все первые n членов, кроме m -го а коэффициент при m -кратном интеграле стал равным единице. Таким образом, следует решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n a_r \alpha_r &= 0; \\ \sum_{r=1}^n a_r \alpha_r^2 &= 0; \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{r=1}^n a_r \alpha_r^m &= 1 \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{r=1}^n a_r \alpha_r^n &= 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Эта система всегда имеет решение и притом единственное, так как определитель системы лишь множителем $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ отличается от определителя Вандермонда.

Таким образом, при любых вещественных числах α_k , отличных от нуля и попарно различных, можно найти такие числа a_r , при которых комбинация (7.3) из реакций цепи равна m -му члену ряда Вольтерры (7.1) с точностью до отброшенных членов порядка $n+1$ и выше. Поэтому выражение (7.3) удобно использовать при идентификации ядра Вольтерры m -го порядка.

Выражения, подобные (7.3), можно построить бесчисленным множеством способов, беря различные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и определяя по ним из (7.5) коэффициенты a_r . Возникает вопрос, существует ли группа чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, являющаяся в каком-либо смысле предпочтительной? Прежде всего, целесообразно выбирать α_k так, чтобы выполнялось условие $|\alpha_k| \leq 1, k = 1, 2, \dots, n$. При невыполнении этого условия существует опасность расходимости ряда (7.2). Кроме того, можно указать систему чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, в определенном смысле минимизирующих влияние оставшихся членов ряда Вольтерры $(n+1)$ -й степени и выше в выражении (7.3) [16]. Опишем вкратце суть алгоритма получения таких чисел.

Так как погрешности определяются членами ряда Вольтерры, имеющими степень выше n , то обозначим в (7.2) эти члены через $\epsilon(\alpha)$:

$$y[\alpha x(t)] = \sum_{k=1}^n \alpha^k \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \times \\ \times \prod_{r=1}^k x(t - \tau_r) d\tau_r + \epsilon(\alpha).$$

Подставим это выражение в (7.3), выбрав коэффициенты a_r в соответствии с (7.5). Тогда получим

$$\sum_{r=1}^n a_r y[\alpha_r x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_m(\tau_1, \dots, \tau_m) \times \\ \times \prod_{q=1}^m x(t - \tau_q) d\tau_q + \sum_{r=1}^n a_r \epsilon(\alpha_r). \quad (7.6)$$

Чем меньше по модулю последнее слагаемое в правой части (7.6), тем точнее левая часть, найденная экспериментально, аппроксимирует член m -го порядка ряда Вольтерры. Запишем следующее неравенство:

$$\left| \sum_{r=1}^n a_r \epsilon(\alpha_r) \right| \leq \left[\max_r \left| \epsilon(\alpha_r) \right| \right] \sum_{r=1}^n |a_r|. \quad (7.7)$$

Представляется естественным для уменьшения левой части (7.7) потребовать минимизации сомножителя $\sum_{r=1}^n |a_r|$ в правой части, поскольку управлять величиной другого сомножителя в правой части (7.7) затруднительно. Так как коэффициенты a_r однозначно определяются через α_r из (7.5), то приходим к следующей оптимизационной задаче: найти такие вещественные различные и отличные от нуля числа α_k , $|\alpha_k| \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, чтобы минимизировать целевую функцию

$$\sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Для некоторых конкретных значений n такие числа определены [16]. Приведем их.

$$n=2: \quad \alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = \sqrt{2} - 1;$$

$$n=3:$$

$$m=1 \quad \alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = \sqrt{2} - 1; \quad \alpha_3 = 0,5;$$

$$m=2 \quad \alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = \sqrt{2} - 1; \quad \alpha_3 = 0,6;$$

$$m=3 \quad \alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = 0,5; \quad \alpha_3 = 0,6;$$

$$n=4:$$

$$m=1 \quad \alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = \sqrt{2} - 1; \quad \alpha_3 = 0,5; \quad \alpha_4 = 0,56;$$

$$m=2 \quad \alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = \sqrt{2} - 1; \quad \alpha_3 = 0,6; \quad \alpha_4 = 0,64;$$

$$m=3 \quad \alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = 0,5; \quad \alpha_3 = 0,6; \quad \alpha_4 = 0,69;$$

$$m=4 \quad \alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = 0,56; \quad \alpha_3 = 0,64; \quad \alpha_4 = 0,69.$$

Итак, линейная комбинация реакций цепи (7.3) дает возможность выделить для идентификации один член ряда Вольтерры. Опишем способ определения ядра этого члена ряда вначале во временной области.

Начнем с ядра первого порядка. Пусть внешним воздействием будет импульсная функция Дирака

$$x(t) = \delta(t).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h_1(t).$$

Таким образом, как это хорошо известно из теории линейных цепей, ядро первого порядка — это реакция цепи на воздействие в виде единичной импульсной функции.

Перейдем к идентификации ядра второго порядка. Пусть внешнее воздействие состоит из двух импульсных функций, сдвинутых на время T :

$$x(t) = \delta(t) + \delta(t - T).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) [\delta(t - \tau_1) + \delta(t - T - \tau_1)] [\delta(t - \tau_2) + \\ & + \delta(t - T - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) [\delta(t - \tau_1) \delta(t - \tau_2) + \\ & + \delta(t - T - \tau_1) \delta(t - \tau_2) + \delta(t - \tau_1) \delta(t - T - \tau_2) + \delta(t - T - \tau_1) \times \\ & \times \delta(t - T - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = h_2(t, t) + h_2(t - T, t) + h_2(t, t - T) + \\ & + h_2(t - T, t - T). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Так как ядро симметризовано, то $h_2(t - T, t) = h_2(t, t - T)$. Для определения $h_2(t, t)$ достаточно положить $x(t) = \delta(t)$, ибо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \delta(t - \tau_1) \delta(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = h_2(t, t).$$

Таким образом, полный алгоритм определения ядра второго порядка в соответствии со сказанным состоит в следующем:

1. Предполагаем, что ряд Вольтерры с достаточной точностью можно заменить суммой первых n его членов. Дать общие рекомендации по выбору числа n затруднительно. Часто берут $n = 3 \div 5$. Чем больше n , тем меньше влияние отброшенных членов, однако тем больше проводится тестовых испытаний и тем больше погрешность при обработке результатов экспериментов.

2. Подаем на вход цепи поочередно воздействия $\alpha_r \delta(t)$ и измеряем реакции $y[\alpha_r \delta(t)]$, $r = 1, 2, \dots, n$.

3. Находим $h_2(t, t)$:

$$h_2(t, t) = \sum_{r=1}^n a_r y[\alpha_r \delta(t)].$$

Так как это равенство справедливо при любом $t > 0$, то тем самым определена и функция $h_2(t - T, t - T)$ при любом $T < t$.

4. Подаем на вход цепи поочередно воздействия $\alpha_r[\delta(t) + \delta(t - T)]$ и измеряем реакции $y[\alpha_r\delta(t) + \alpha_r\delta(t - T)]$.

5. В соответствии с (7.8) находим

$$\sum_{r=1}^n \alpha_r y[\alpha_r \delta(t) + \alpha_r \delta(t - T)] = \\ = h_2(t, t) + h_2(t - T, t - T) + 2h_2(t, t - T).$$

Левая часть этого выражения — известная функция, а в правой части уже найдены $h_2(t, t)$ и $h_2(t - T, t - T)$. Отсюда находим $h_2(t, t - T)$.

6. Повторяем пп. 4 и 5 при различных T до тех пор пока ядро $h_2(t, t - T)$ не будет определено в необходимом диапазоне переменных.

Ядра более высоких порядков определяются по аналогичной методике. Для идентификации ядра k -го порядка используются воздействия вида

$$x(t) = \sum_{l=1}^k \delta(t - T_l).$$

Следует отметить, что при всей идейной простоте методики ее практическая реализация может вызвать трудности, связанные с погрешностями эксперимента, измерений и отброшенными слагаемыми ряда Вольтерры. Для преодоления этих трудностей приходится применять специальные приемы, основанные на методах решения некорректных задач [35].

Рассмотрим теперь методику идентификации ядер в частотной области, т. е. методику определения Фурье-изображений $H_k(j\omega_1, \dots, j\omega_k)$. Здесь для решения задачи часто используют тестовые сигналы в виде суммы косинусоидальных функций.

Для идентификации ядра первого порядка подадим на вход цепи сигнал

$$x(t) = A \cos \omega t.$$

Тогда на основе определения Фурье-изображения ядра из (6.38) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) \frac{A}{2} \left[e^{j\omega(t - \tau)} + e^{-j\omega(t - \tau)} \right] d\tau = \\ = \frac{A}{2} \left[e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \right] =$$

$$= \frac{A}{2} \left[e^{j\omega t} H_1(j\omega) + e^{-j\omega t} H_1(-j\omega) \right] = A |H(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi).$$

Последнее равенство следует из того, что $H_1(-j\omega)$ и $H_1(j\omega)$ — комплексно-сопряженные функции. Таким образом, как это хорошо известно, частотная характеристика передаточной функции линейной цепи может быть определена путем измерения амплитуды и фазы выходного сигнала при косинусоидальном воздействии.

Для идентификации ядра второго порядка подадим на вход цепи сигнал

$$x(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t.$$

Одинаковые амплитуды и начальные фазы обеих гармонических составляющих взяты только для простоты дальнейших выкладок.

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \left[e^{j\omega_1(t - \tau_1)} + e^{-j\omega_1(t - \tau_1)} + \right. \\ &+ e^{j\omega_2(t - \tau_1)} + e^{-j\omega_2(t - \tau_1)} \left. \right] \left[e^{j\omega_1(t - \tau_2)} + e^{-j\omega_1(t - \tau_2)} + \right. \\ &+ e^{j\omega_2(t - \tau_2)} + e^{-j\omega_2(t - \tau_2)} \left. \right] d\tau_1 d\tau_2 = \frac{A^2}{4} \left[e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} \times \right. \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j\omega_1\tau_1} e^{-j\omega_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ e^{-j(\omega_1 + \omega_2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{j\omega_1\tau_1} e^{j\omega_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j\omega_1\tau_1} e^{j\omega_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ e^{-j(\omega_1 - \omega_2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{j\omega_1\tau_1} e^{-j\omega_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j\omega_2\tau_1} e^{-j\omega_1\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ e^{-j(\omega_1 + \omega_2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{j\omega_2\tau_1} e^{j\omega_1\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j\omega_1\tau_2} e^{j\omega_2\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + e^{-j(\omega_1 - \omega_2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{j\omega_1\tau_2} e^{-j\omega_2\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + e^{j2\omega_1 t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j\omega_1(\tau_1 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + e^{-j2\omega_1 t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{j\omega_1(\tau_1 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + e^{j2\omega_2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{j\omega_2(\tau_1 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + e^{-j2\omega_2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j\omega_2(\tau_1 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j\omega_1\tau_1} e^{j\omega_1\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{j\omega_1\tau_1} e^{-j\omega_1\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{j\omega_2\tau_1} e^{-j\omega_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{j\omega_2\tau_1} e^{-j\omega_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \Big] = \\
& = \frac{A^2}{2} \left\{ |H_2(j\omega_1, j\omega_2)| \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \arg H_2(j\omega_1, j\omega_2)] + \right. \\
& + |H_2(j\omega_1, -j\omega_2)| \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \arg H_2(j\omega_1, -j\omega_2)] + \\
& + |H_2(j\omega_2, j\omega_1)| \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \arg H_2(j\omega_2, j\omega_1)] + \\
& + |H_2(j\omega_2, -j\omega_1)| \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \arg H_2(j\omega_2, -j\omega_1)] + \\
& + |H_2(j\omega_1, j\omega_1)| \cos[2\omega_1 t + \arg H_2(j\omega_1, j\omega_1)] + \\
& + |H_2(j\omega_2, j\omega_2)| \cos[2\omega_2 t + \arg H_2(j\omega_2, j\omega_2)] + \\
& + [H_2(j\omega_1, -j\omega_1) + H_2(-j\omega_1, j\omega_1)] + [H_2(j\omega_2, -j\omega_2) + \\
& + H_2(-j\omega_2, j\omega_2)] \Big\}.
\end{aligned}$$

Если из этого выражения выделить гармонические составляющие с частотой $\omega_1 + \omega_2$, то, учитывая симметрию ядер, найдем, что эти составляющие в сумме равны

$$A^2 |H_2(j\omega_1, j\omega_2)| \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \arg H_2(j\omega_1, j\omega_2)]. \quad (7.9)$$

Таким образом, здесь содержится информация о модуле и аргументе Фурье-изображения ядра второго порядка.

Общий алгоритм определения ядер второго порядка в области изображений во многих чертах схож с алгоритмом идентификации во временной области.

После подачи на вход цепи воздействий вида

$$\alpha_r x(t) = \alpha_r A \cos \omega_1 t + \alpha_r A \cos \omega_2 t, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

и измерения соответствующих реакций $y[\alpha_r x(t)]$ образуем выражение вида (7.3) при $m = 2$. В полученном выражении выделяем гармоническую составляющую с частотой $\omega_1 + \omega_2$. Так как эта составляющая имеет вид (7.9), то отсюда находим $|H_2(j\omega_1, j\omega_2)|$ и $\arg H_2(j\omega_1, j\omega_2)$.

Аналогичным образом для определения изображений ядер k -го порядка ($k > 2$) на цепь подаются входные сигналы

$$\alpha_r x(t) = \alpha_r \sum_{l=1}^k A \cos \omega_l t \quad (7.10)$$

или в более общем случае

$$\alpha_r x(t) = \alpha_r \sum_{l=1}^k A_l \cos(\omega_l t + \beta_l), \quad (7.11)$$

измеряются реакции $y[\alpha_r x(t)]$ и в выражении (7.3) при $m = k$ выделяется гармоническая составляющая с частотой $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k$.

При практическом использовании описанной методики необходимо соблюдать известную осторожность в выборе частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. Дело в том, что, как нетрудно проверить, при воздействиях вида (7.10) или (7.11) все гармонические составляющие в (7.3) при $m = k$ имеют частоты, определяемые выражением

$$\sum_{l=1}^k q_l \omega_l,$$

где q_l — целые числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{l=1}^k |q_l| = k.$$

Для применения вышеизложенной методики необходимо, чтобы равенство

$$\sum_{l=1}^k q_l \omega_l = \sum_{l=1}^k q_l' \omega_l$$

могло выполняться только тогда, когда $q_l = q_l', l = 1, 2, \dots, k$.

Это накладывает определенные ограничения на выбор частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, т. е. ядра определяются не в любых точках пространства с координатами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. Ядра в промежуточных точках находятся путем интерполяции.

Идентификация цепей при больших амплитудах внешних воздействий. При достаточно больших амплитудах внешних воздействий реакцию цепи нельзя представить в виде функционального ряда, так как радиусы сходимости рядов обычно ограничены. Тем не менее во многих случаях оказывается возможным приближенно представить реакцию цепи в виде функционального полинома Вольтерры. Принципиально такая возможность следует из теоремы Фреше [29]. Из нее вытекает, что если зависимость реакции от воздействия описывается непрерывным оператором, то при любом множестве внешних воздействий, равномерно ограниченных по норме, можно найти функциональный полином Вольтерры, аппроксимирующий с заданной точностью реакцию цепи на эти воздействия на заданном конечном отрезке времени.

Доказательство теоремы Фреше непосредственно не содержит конструктивного и удобного для практики способа построения указанных функциональных полиномов. Один из конструктивных подходов заключается в применении методики, изложенной выше для слабонелинейного режима. Разница заключается в том, что теперь не нужно требовать достаточно малых амплитуд входных воздействий. Однако в противовес этому положительному факту появляются и дополнительные трудности. Если для слабонелинейного режима часто достаточно было заменить ряд Вольтерры двумя-тремя первыми членами, то нелинейные цепи в режиме большого сигнала могут потребовать большого числа слагаемых функциональных полиномов, что приведет к увеличению вычислительных трудностей.

Вторая проблема состоит в том, что если даже удастся преодолеть указанные трудности и построить функциональный полином довольно высокой степени, возникает вопрос, как с ним работать. Непосредственный расчет интегралов Вольтерры, содержащих ядра хотя бы четвертого, пятого порядков, не говоря уже о более высоких, часто встречается значительные вычислительные трудности. Модель фрагмента цепи, записанную в виде функционального полинома Вольтерры, не всегда удобно стыковать с моделями других фрагментов цепи, особенно если модели последних не являются полиномами Вольтерры.

Эти и подобные им проблемы привели к тому, что инженеры стали искать упрощенные формы функциональных полиномов, дающие возможность облегчить вычисления. Одно из решений — использование ВП-полиномов (см. главу 6). Так, к примеру, широко используется оператор Гаммерштейна [12]. В несколько упрощенной форме он имеет вид

$$y[x(t)] = \sum_{k=1}^n H_k(p) [x(t)]^k. \quad (7.12)$$

Таким образом, прежде всего предполагается справедливой гипотеза о том, что оператор, описывающий соотношение вход-выход исследуемой цепи, с достаточной точностью аппроксимируется оператором (7.12) на заданном классе сигналов $x(t)$ и $y(t)$. Выбираем число n и по тестовым испытаниям определяем операторы $H_k(p)$. Последнее можно выполнить многими способами. Некоторые из них сводят задачу к определению частотных характеристик передаточных функций. Если рассматривать $H_k(p)$ как функции от p , то оператор (7.12) будет полностью определен, если найдены функции $H_k(j\omega)$. Действительно, эти функции позволяют определить в (7.12) $y[x(t)]$ по заданной функции $x(t)$. Для этого вначале вычисляется преобразование Фурье функций $[x(t)]^k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), т. е. $F\{[x(t)]^k\}$. Затем рассчитывается функция

$$\sum_{k=1}^n H_k(j\omega) F\{[x(t)]^k\},$$

после чего вычисляется обратное преобразование Фурье.

Для определения функций $H_k(j\omega)$ можно подать на вход исследуемой цепи поочередно n воздействий $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ и измерить реакции на них $y[x_1(t)], y[x_2(t)], \dots, y[x_n(t)]$. Тогда из (7.12) получим n уравнений

$$F\{y[x_m(t)]\} = \sum_{k=1}^n H_k(j\omega) F\{[x_m(t)]^k\}, m = 1, \dots, n, \quad (7.13)$$

содержащих n неизвестных $H_k(j\omega)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

При некоторых значениях $x_k(t)$ можно гарантировать отличие от нуля определителя системы (7.13). К примеру, если $x_k(t) = \alpha_k \delta_1(t)$, где $\delta_1(t)$ — единичная ступенчатая функция, а α_k — различные, отличающиеся от нуля числа, $k = 1, 2, \dots, n$, то нетрудно видеть, что определитель системы (7.13) пропорционален определителю Вандермонда и потому отличен от нуля. Тем самым, решив систему (7.13), можно определить функции $H_k(j\omega)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

После построения оператора (7.12) необходимо оценить, с какой точностью он аппроксимирует заданный оператор. Для этого обычно на цепь подают некоторые воздействия $x(t)$ из класса входных воздействий и измеряют реакции. Затем эти реакции сравниваются со значениями правой части (7.12) при тех же значениях $x(t)$. Если совпадение признается неудовлетворительным, то либо увеличивают n в операторе (7.12), либо переходят к более сложным формам оператора.

Эти более сложные операторы также можно выбрать в виде ВП-полиномов. Приведем некоторые из них.

Типовое радиотехническое звено [12]:

$$y[x(t)] = H_1(p) \sum_{k=1}^n a_k [H_2(p)x(t)]^k.$$

Обобщенное радиотехническое звено [12]:

$$y[x(t)] = \sum_{k=1}^n H_{k1}(p) [H_{k2}(p)x(t)]^k.$$

Факторизуемая система [12]:

$$y[x(t)] = \sum_{k=1}^n \prod_{r=1}^k H_{rk}(p) x(t).$$

Идентификация приведенных операторов представляет собой более сложную задачу, чем идентификация оператора Гаммерштейна, и здесь не приводится. Соответствующие сведения можно почерпнуть из работ [31, 32].

7.4. ДИАГНОСТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Как уже отмечалось в начале главы, одной из задач диагностики электрических цепей является обнаружение неисправностей в цепи. После локализации неисправного элемента он подлежит замене. Таким образом, здесь диагностике подвергается цепь, уже вышедшая из строя. По-иному ставится задача в том случае, когда цепь еще удовлетворительно работает, однако требуется дать прогноз ее дальнейшей работы и оценить, насколько отклонились ее параметры от расчетных. Наконец, третий случай относится к проблеме контроля качества. Здесь необходимо по результатам тестовых испытаний оценить, будет ли удовлетворительно работать цепь в реальных условиях. Здесь часто исследуются цепи, в которых отдельные элементы недоступны (на-

пример, микросхемы), и если ответ на последний вопрос отрицателен, то замене подлежит вся цепь.

Методы диагностики существенно зависят от того, какая из указанных задач подлежит решению. Остановимся на некоторых из этих методов, выбрав те, которые отражают наиболее характерные черты существующих многочисленных подходов.

Один из распространенных методов — метод справочников. Он, как правило, пригоден для случая, когда в цепи имеется один неисправный элемент.

На стадии проектирования электрической цепи проектировщик выбирает контрольные точки для тестирования. Число этих точек должно быть по понятным причинам невелико, а выбор их определяется полнотой решения задачи диагностики.

Если схема цепи известна, то, подавая на цепь определенные воздействия, можно вычислить реакции в контрольных точках. Эти реакции вычисляются после того, как в цепи имитирована неисправность какого-либо элемента, например обрыв, короткое замыкание, изменение параметра на 50% и т. д. По данным измерений составляется таблица, которая называется справочником. При контроле реальной цепи результаты измерений в контрольных точках сравниваются со справочником и на основе этого сравнения делается вывод о состоянии элементов цепи.

В качестве примера рассмотрим процедуру составления справочника для цепи в режиме постоянного тока при катастрофических отказах (т. е. обрыве или коротком замыкании элементов). Цепь изображена на рис. 7.2. Пусть $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, диод — идеальный, т. е. его сопротивление в проводящем направлении равно нулю, а в обратном — бесконечности.

Пусть контрольными точками являются левые и правые пары выводов цепи, причем воздействиями являются постоянные напряжения U_1 и U_2 , а реакциями — токи i_1 и i_2 . Проводим два опыта: в первом $U_1 = 1$, $U_2 = 0$; во втором $U_1 = 0$, $U_2 = 1$. В табл. 7.1 приведены результаты испытаний. Пары чисел в каждой клетке таблицы — это соответственно токи i_1 и i_2 . Из таблицы видно, что четвертый и восьмой столбцы одинаковы. Следовательно, с помощью описанных испытаний можно однозначно идентифицировать все катастрофические отказы, кроме двух случаев: к примеру, нельзя отличить обрыв диода от обрыва резистивного элемента R_2 . Восьмой и четвертый столбцы образуют так называемое множество неоднозначности.

Множество неоднозначности иногда можно устранить, изменив множество контрольных точек,

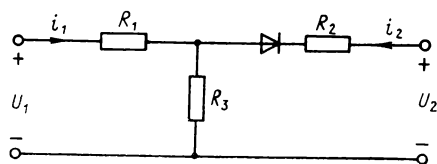


Рис. 7.2

Таблица 7.1

Условия опыта	Токи $i_1; i_2$ (о. е.) в режиме:									
	к. з. R_1	обрыва R_1	к. з. R_2	обрыва R_2	к. з. R_3	обрыва R_3	к. з. диода	обрыва диода	номиналь- ном	
$U_1 = 1,$ $U_2 = 0$	2; -1	0; 0	1; -1	$\frac{1}{2}; 0$	1; 0	$\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}; 0$	$\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}$	
$U_1 = 0,$ $U_2 = 1$	0; 0	0; 0	0; 0	0; 0	0; 0	0; 0	$\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}$	0; 0	0; 0	

однако в этом случае могут появиться другие множества неоднозначности. Если полностью устранить множества неоднозначности не удастся, то в ряде случаев уточнению места неисправности помогает дополнительная априорная информация об объекте либо введение дополнительных критериев, например критериев надежности, вероятностей отказов и т. д.

К примеру, в нашем случае, если считать, что выводы элементов пропаяны достаточно надежно, можно с большей уверенностью говорить об обрыве диода, чем резистора, так как диоды обычно больше подвержены тепловому разрушению.

Если же множества неоднозначности все же не удастся ликвидировать, то замене подлежат все элементы, образующие эти множества.

Аналогичным образом применяется метод справочников и для цепей, содержащих реактивные элементы. В этом случае тестирование проводится уже не по постоянному току, а в режиме периодических или импульсных сигналов.

Метод справочников применяется не только для катастрофических отказов. В случае "мягких" неисправностей, т. е. некоторого отклонения параметров элементов от номинальных, при составлении справочника целесообразно записывать в таблицу не реакции элементов, а некоторые числа (сигнатуры), характеризующие степень отклонения реакции от номинальной. Это помогает устранить влияние погрешностей измерений и упрощает выделение множеств неоднозначности. Для иллюстрации сказанного вернемся к цепи на рис. 7.2. Измеряя токи i_1 и i_2 , будем сравнивать их с токами номинального режима и ставить в соответствие измеренным токам два числа. Пусть в номинальном режиме соответственные токи равны $i_{1н}$ и $i_{2н}$. Если $|i_1 - i_{1н}| \leq 0,1$, то ставим в соответствие i_1 число 1. В противном случае ставим в соответствие i_1 число 0. Аналогично, если $|i_2 - i_{2н}| \leq 0,1$, то ставим в соответствие i_2 число 1, а в противном случае 0. В табл. 7.2 приведены сигнатуры для случаев отклонения параметров элементов на 50% от номинальных (обозначено соответственно R_k^+ или R_k^-).

Из таблицы видно, что третий столбец с шестым и четвертый с пятым образуют множество неоднозначности. Для устранения этих множеств можно было бы применить более точное квантование отклонения сигналов, например, если $0 \leq |i_k - i_{kH}| \leq 0,05$, то току i_k ставим в соответствие число 1; если $0,5 \leq |i_k - i_{kH}| \leq 0,1$, то ставим в соответствие i_k число 2, а если $|i_k - i_{kH}| > 0,1$, то ставим току i_k в соответствие число 3.

Более подробные сведения о методе справочников можно почерпнуть из обзора [5].

Еще одним распространенным методом диагностики является метод параметрической идентификации [5]. В отличие от метода справочников он позволяет оценить отклонение от номинальных значений параметров нескольких (теоретически всех) элементов цепи.

Идея метода довольно проста. Изложим ее для режима постоянного тока. Предполагается, что топология цепи известна и имеется множество выводов схемы, доступных для измерений или подачи входных сигналов. Предполагается также, что номинальные значения параметров известны. Тогда можно составить уравнения, связывающие вектор входных сигналов X , вектор выходных сигналов Y и вектор параметров φ :

$$X = f[Y, \varphi]. \quad (7.14)$$

Если число неизвестных параметров равно n , т. е. $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$, то необходимо иметь n скалярных уравнений. Если в (7.14) число скалярных уравнений меньше n , то следует взять новые значения входных воздействий X , измерить реакции на них Y и добавить уравнения к (7.14), чтобы общее число уравнений было n . Далее эти уравнения решаются методом Ньютона или его модификацией — так называемым стабилизированным методом Ньютона [5]. Очевидно, что для существования решения необходимо, чтобы матрица Якоби $\left. \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = \varphi^*}$, где φ^* — вектор номинальных значений параметров, была неособой.

Таблица 7.2

Условия опыта	Токи $i_1; i_2$ (сигнатуры) в режиме:					
	R_1^+	R_1^-	R_2^+	R_2^-	R_3^+	R_3^-
$U_1 = 1,$ $U_2 = 0$	0; 1	0; 0	1; 1	1; 0	1; 0	1; 1
$U_1 = 0,$ $U_2 = 1$	1; 1	1; 1	1; 1	1; 1	1; 1	1; 1

Так как любая квадратная матрица, умноженная на свою транспонированную, является положительно полуопределенной, то условие особенности матрицы $\left. \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = \varphi^*}$ эквивалентно требованию, чтобы матрица

$$\left[\left. \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = \varphi^*} \right] \left[\left. \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = \varphi^*} \right]^T$$

была положительно определенной.

В [5] показано, что это требование является необходимым и достаточным для определения параметров из уравнений вида (7.14).

Описанный подход может быть распространен и на нелинейные инерционные цепи, работающие при переменных сигналах (см. обзор [5], где описаны и другие подходы).

Изложенные методы предполагают известной топологию цепи и позволяют указать элементы, параметры которых изменились.

Как уже отмечалось выше, иные задачи и подходы применяются тогда, когда требуется лишь ответить на вопрос, работоспособна ли цепь, не интересуясь, какой конкретно элемент вышел из строя. Некоторые из этих подходов описаны, например, в [14]. Изложим один из них.

Предполагается, что цепь исследуется в режиме постоянного тока. Имеется n пар выводов, на которые можно подавать входные сигналы — напряжения (токи) — и измерять реакции цепи — токи (напряжения). Точные уравнения цепи предполагают неизвестными. Задача состоит в том, чтобы по результатам тестовых испытаний на доступных выводах определить, не произошел ли обрыв или короткое замыкание какого-либо резистивного элемента. Таким образом, здесь предполагается, что возможны только жесткие (катастрофические) отказы, и требуется только определить, исправна цепь или нет. Если она неисправна, то подлежит замене вся.

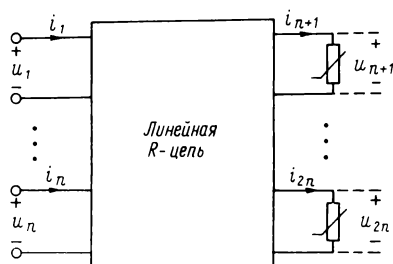


Рис. 7.3

Представим исследуемую цепь в таком виде, как показано на рис. 7.3. Доступными здесь являются только левые выводы. Число пар доступных выводов равно числу нелинейных резисторов. Таким образом, предполагается, что уже на стадии проектирования в цепи выбраны n пар контрольных выводов. Если такое число контрольных точек вывести невозможно,

то методика диагностики несколько изменяется, о чем будет сказано ниже.

Сигналы на левых и правых выводах линейной R -цепи можно связать уравнением

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \\ i_1 \\ \dots \\ i_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ \dots \\ u_{2n} \\ i_{n+1} \\ \dots \\ i_{2n} \end{bmatrix}$$

Как уже отмечалось, уравнения цепи, а следовательно, и матрица A предполагаются неизвестными. Единственное, что должно быть известным заранее, — то, что матрица A неособая.

Подадим на левые пары выводов напряжения $u_1^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}$ и измерим токи $i_1^{(1)}, \dots, i_n^{(1)}$. Затем подадим другие напряжения $u_1^{(2)}, \dots, u_n^{(2)}$ и снова измерим токи $i_1^{(2)}, \dots, i_n^{(2)}$. Всего сделаем $2n$ таких опытов и образуем матрицу

$$\begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \dots & u_1^{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \dots & u_n^{(2n)} \\ i_1^{(1)} & i_1^{(2)} & \dots & i_1^{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i_n^{(1)} & i_n^{(2)} & \dots & i_n^{(2n)} \end{bmatrix} = B.$$

Как показано в [14], если определитель матрицы B отличен от нуля, то среди нелинейных элементов нет ни обрывов, ни коротких замыканий.

Если же матрица B особая, то либо такие обрывы или короткие замыкания имеют место, либо хотя бы один из нелинейных элементов имеет участок вольт-амперной характеристики, близкий к линейному, и в двух различных опытах рабочая точка оказалась оба раза на этом участке характеристики. В последнем случае можно повторить серию из $2n$ опытов, но уже с другими входными напряжениями. Если хотя бы в одной из серии опытов получится, что определитель матрицы B не равен нулю, отсюда следует, что цепь не имеет обрывов или коротких замыканий нелинейных элементов. Почти всегда имеется какая-то дополнительная априорная информация о свойствах цепи. Если эта информация позволяет так выбрать входные напряжения, чтобы в раз-

личных опытах рабочие точки не попадали на одни и те же линейные участки вольт-амперных характеристик, то в этом случае из равенства нулю определителя матрицы \mathbf{B} следует наличие обрыва или короткого замыкания хотя бы в одном нелинейном элементе.

Если число нелинейных элементов равно m и $m > n$, то, пользуясь указанной априорной информацией, можно в ряде случаев так выбрать входные напряжения, чтобы во всех опытах рабочие точки $m - n$ нелинейных элементов находились на одних и тех же линейных участках вольт-амперных характеристик (например, в режиме насыщения). При этом указанные элементы не проявляют своих нелинейных свойств и общее число нелинейных элементов снова оказывается равным n . Диагностике подлежат именно эти n элементов.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

8.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Исследование свойств нелинейных электрических цепей не исчерпывается изучением численных значений или аналитических выражений, полученных при решении уравнений, описывающих цепи. Инженеру часто требуется дополнительная информация общего, качественного характера о свойствах данной цепи или множества цепей, принадлежащих некоторому классу. Эта информация особенно важна на этапе предварительного проектирования электротехнических и электронных устройств, когда проектировщик, не имея еще конкретной цепи, использует собственный опыт, интуицию и сведения об общих свойствах некоторых классов цепей.

Приведем примеры такого рода общих свойств цепей, облегчающих проектирование. Предположим, что требуется построить цепь, которая при заданном периодическом воздействии имела бы заданную периодическую реакцию с тем же периодом. Для практической реализации недостаточно просто указать схему цепи, обладающей данным свойством. Реальная цепь, построенная по указанной схеме, может не дать нужного результата, так как требуемое периодическое решение будет либо неустойчивым, либо неединственным. Следовательно, инженеру придется решать дополнительные задачи. Поэтому было бы желательно иметь заранее сведения о таком классе цепей, который бы обеспечивал устойчивость и единственность периодического реше-

ния. Тогда можно было бы искомую цепь выбрать из цепей указанного класса.

Другой пример. На стадии предварительного проектирования желательно иметь хотя бы ориентировочные оценки максимальных напряжений, токов, мощностей, выделяющихся на элементах цепи. Эти данные позволяют правильно выбрать элементный базис цепи. Конечно, после того как цепь синтезирована, имеется возможность провести дополнительный анализ и получить необходимые сведения. Однако этот путь не всегда эффективен, во-первых, из-за дополнительных затрат машинного времени, а во-вторых, из-за его неопределенности. Ведь если расчет показал, что указанные максимальные значения превышают допустимые, приходится рассчитывать новую цепь, для которой снова ее пригодность может быть проверена только после того, как цепь синтезирована.

Третий пример относится к тому случаю, когда априорная информация о свойствах цепи позволяет проектировщику избежать заведомо ложных путей исследования. Предположим, что поставлена задача построить цепь, которая при постоянных внешних воздействиях должна иметь периодическую реакцию (автоколебательная цепь). При этом требуется построить цепь в элементном базисе, содержащем линейные элементы R , L , C и нелинейные резисторы с неубывающими вольт-амперными характеристиками. Инженер заранее сможет избежать ненужных усилий по решению задачи, если будет знать, что существует теорема, утверждающая, что построить требуемую цепь в указанном элементном базисе невозможно.

Эти и подобные им примеры свидетельствуют, что чем больше сведений имеется об общих, качественных свойствах цепи, тем легче проходит этап проектирования.

Каковы же пути выяснения этих общих свойств цепи? В настоящее время наиболее эффективным способом получения информации об общих свойствах цепи является использование энергетических соображений и связанных с ними частотных методов. Соответствующие подходы описаны в следующих параграфах.

8.2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕЛЛЕДЖЕНА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Пусть задана электрическая цепь произвольной топологии. Закон сохранения энергии дает возможность записать уравнение баланса мощностей в цепи

$$\sum_k u_k(t) i_k(t) \equiv 0. \quad (8.1)$$

Здесь суммирование ведется по всем ветвям цепи; $u_k(t)$ — напряжение на k -й ветви; $i_k(t)$ — ток через k -ю ветвь.

Предполагается, что положительное направление напряжения $u_k(t)$ и тока $i_k(t)$ согласованы, например, так, как показано на рис. 8.1.

Теорема Телледжена утверждает, что равенство (8.1) можно существенно обобщить, а именно, оно остается справедливым, если все $u_k(t)$ заменить произвольными функциями времени $x_k(t)$, удовлетворяющими системе независимых уравнений 2-го закона Кирхгофа для цепи, а все $i_k(t)$ заменить произвольными функциями времени $y_k(t)$, удовлетворяющими системе независимых уравнений 1-го закона Кирхгофа, т. е. справедливо равенство

$$\sum_k x_k(t) y_k(t) \equiv 0. \quad (8.2)$$

Таким образом, основное отличие (8.1) от (8.2) состоит в том, что если $u_k(t)$ и $i_k(t)$ в (8.1) связаны между собой уравнениями, определяемыми элементами, входящими в k -ю ветвь (например, $u_k = Ri_k$ для резистора, $u_k = L \frac{di_k}{dt}$ для индуктивности и т. д.), то переменные $x_k(t)$ и $y_k(t)$ могут не иметь такой связи.

Теорема Телледжена доказывается во многих монографиях и учебниках, и поэтому доказательство здесь не приводится [28].

Приведем вначале простой пример, демонстрирующий эффективность общих рассуждений и использующий лишь закон сохранения энергии, т. е. теорему Телледжена, в простейшей формуле (8.1).

На рис. 8.2 изображена цепь, находящаяся при $t > 0$ под воздействием постоянного напряжения U , причем при $t = 0$ запасы энергии в емкостях и индуктивностях были равны нулю. Можно ли, не выполняя полного расчета цепи, определить, сколько энергии выделится во всех резисторах за все время переходного процесса? Оказывается, чтобы дать положительный ответ на этот вопрос, не требуется даже

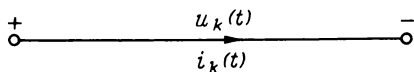


Рис. 8.1

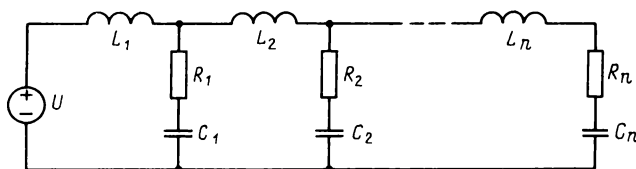


Рис. 8.2

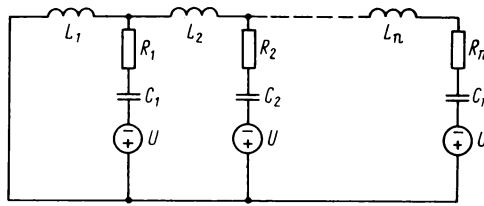


Рис. 8.3

знать сопротивления R_1, R_2, \dots и индуктивности L_1, L_2, \dots . Для решения задачи "расцепим" источник U на n одинаковых источников (рис. 8.3). Такая замена, очевидно, не изменит токов, протекающих во всех ветвях. Теперь объединим каждую емкость с последовательно включенным источником, заменив их одной емкостью, имеющей начальное напряжение U (рис. 8.4).

Таким образом, преобразования привели к схеме, в которой имеет место только свободный режим, вызванный освобождением энергии, накопленной в емкостях, и необратимым потреблением ее резисторами. Следовательно, полная энергия, выделившаяся в резисторах за все время переходного процесса, равна

$$\sum_{k=1}^n \frac{C_k U^2}{2}.$$

Следующий пример относится к анализу нелинейной резистивной цепи. Пусть задана цепь, состоящая из нелинейных резисторов, имеющих строго монотонно возрастающие вольт-амперные характеристики $u_k = f_k(i_k)$.

(8.3)

Пусть на вход цепи приложено постоянное напряжение U . Предположим, что в результате анализа цепи определены токи во всех ветвях. Можно ли утверждать, что найденный режим в цепи будет един-

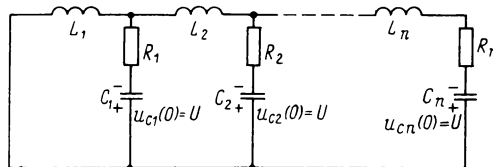


Рис. 8.4

ственным, т. е. что не существует другого решения уравнений цепи? Ответ на этот вопрос можно получить с помощью теоремы Телледжена.

Предположим, что существует два различных решения уравнений цепи. Напряжения и токи, соответствующие одному решению, будем помечать штрихом, а другому — двумя штрихами. Из свойств функций f_k в (8.3) следует:

$$(u_k'' - u_k') (i_k'' - i_k') \geq 0. \quad (8.4)$$

При этом равенство нулю достигается только тогда, когда одновременно

$$i_k'' = i_k'; \quad u_k'' = u_k'. \quad (8.5)$$

Поскольку токи i_k' удовлетворяют первому закону Кирхгофа, так же как и токи i_k'' , то первому закону Кирхгофа удовлетворяют и разности $i_k'' - i_k'$. Поэтому к этим величинам применима теорема Телледжена

$$\sum_k (u_k'' - u_k') (i_k'' - i_k') = 0. \quad (8.6)$$

Пусть ветвь, в которую включен источник U , соответствует значению $k = 1$. Так как источник напряжения в обоих режимах не менялся, то $u_1'' - u_1' = 0$. Для остальных же номеров k выполняется (8.4). Следовательно, каждое слагаемое в (8.6) должно равняться нулю, отсюда следует (8.5). Таким образом, цепи рассматриваемого вида могут работать не более чем в одном режиме.

Это утверждение, очевидно, сохраняет силу и для случая, когда в цепи имеется несколько источников напряжения или тока. Доказательство при этом почти не меняется.

Рассмотрим теперь пример, относящийся к возможности генерации автоколебаний в нелинейных цепях. Речь идет о построении цепей, которые под действием постоянного источника давали бы в установившемся режиме периодическую реакцию, отличную от постоянной¹. Известно, что таким свойством могут обладать только нелинейные цепи (чисто реактивные линейные цепи также могут давать периодическую реакцию при постоянном воздействии, но такие цепи не реализуемы на практике и потому не рассматриваются). Не рассматриваются и линейные цепи с переменными параметрами. Возникает вопрос, какие условия должны быть наложены на нелинейные элементы, чтобы в цепи были возможны (или невозможны) автоколебания. Теорема Телледжена позволяет

¹ В общем случае автоколебательными называют цепи, которые при постоянном воздействии дают реакцию, отличную от постоянной при $t \rightarrow \infty$. Среди таких цепей наибольший практический интерес представляют те, которые имеют периодический режим, поэтому они здесь и рассматриваются.

указать в ряде случаев на невозможность автоколебаний и тем самым отбросить заведомо ложные пути.

Поставим вопрос, можно ли построить автоколебательную цепь, содержащую линейные резисторы и нелинейные емкостные элементы, со следующими ограничениями. Все емкости имеют однозначные, строго монотонно возрастающие, дифференцируемые кулон-вольтные характеристики. Покажем, что в такой цепи невозможны автоколебания.

Пусть на входе цепи включено постоянное напряжение U . Если оборвать ветви с емкостными элементами, то в цепи останутся одни резисторы и будет иметь место режим постоянных токов и напряжений. Будем помечать токи и напряжения в этом режиме штрихом. Предположим теперь, что в цепи возник автоколебательный режим. Будем помечать периодические напряжения и токи ветвей, соответствующие этому режиму, двумя штрихами.

Согласно теореме Телледжена можно записать

$$\sum_k (u_k'' - u_k') (i_k'' - i_k') = 0. \quad (8.7)$$

Если некоторая система функций удовлетворяет уравнениям второго закона Кирхгофа, то и производные этих функций также удовлетворяют второму закону Кирхгофа. По этой причине теорема Телледжена остается справедливой, если в (8.7) заменить напряжения их производными:

$$\sum_k \left[\frac{d}{dt} (u_k'' - u_k') \right] (i_k'' - i_k') = 0. \quad (8.8)$$

Пусть периодические колебания имеют период T . Проинтегрируем обе части (8.8) от t_1 до $t_1 + T$:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \sum_k \left[\frac{d}{dt} (u_k'' - u_k') \right] (i_k'' - i_k') dt = 0. \quad (8.9)$$

Рассмотрим по отдельности группы слагаемых в (8.9), соответствующие резисторам, емкостным элементам и источнику. Пусть некоторое значение $k = m$ соответствует в (8.9) ветви, содержащей резистор R_m . Тогда

$$\left[\frac{d}{dt} (u_m'' - u_m') \right] (i_m'' - i_m') = R_m \left[\frac{d}{dt} (i_m'' - i_m') \right] (i_m'' - i_m'),$$

откуда

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \left[\frac{d}{dt} (u_m'' - u_m') \right] (i_m'' - i_m') dt = \frac{R_m}{2} (i_m'' - i_m')^2 \Big|_{t_1}^{t_1+T} = 0. \quad (8.10)$$

Равенство нулю объясняется тем, что по условию $i_m'' - i_m'$ есть периодическая функция, а следовательно, верхний и нижний пределы интегрирования одинаковы.

Пусть теперь номеру $k = r$ соответствует в (8.9) ветвь с емкостью. Тогда $i_r' = 0$, ибо это есть ток через емкость при постоянном напряжении на ней. Пусть u_r'' и i_r'' связаны соотношением

$$i_r'' = \frac{d}{dt} [f(u_r'')], \quad (8.11)$$

где по условию $f(\cdot)$ — однозначная, дифференцируемая, строго монотонно возрастающая функция. Следовательно, (8.11) можно переписать так:

$$i_r'' = \frac{\partial f(u_r'')}{\partial u_r''} \frac{du_r''}{dt}, \quad \frac{\partial f(u_r'')}{\partial u_r''} > 0. \quad (8.12)$$

Используем (8.12) для оценки соответствующего слагаемого в (8.9). При этом учтем, что, так как $u_r' = \text{const}$, то $du_r'/dt = 0$. Получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T} \left[\frac{d}{dt} (u_r'' - u_r') (i_r'' - i_r') \right] dt &= \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{du_r''}{dt} i_r'' dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{\partial f(u_r'')}{\partial u_r''} \left(\frac{du_r''}{dt} \right)^2 dt \geq 0. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Остается рассмотреть в (8.9) слагаемое, соответствующее источнику напряжения. Но оно равно нулю, так как для индекса k , соответствующего источнику,

$$u_k'' = u_k' = U.$$

Таким образом, в (8.9) в правой части стоит нуль, а все слагаемые левой части неотрицательны. Поэтому они должны быть равны нулю по отдельности; следовательно, неравенства в (8.13) необходимо заменить на равенства. Но отсюда следует, что $u_r'' = \text{const}$, т. е. периодических колебаний, отличных от постоянных, в цепи быть не может.

Аналогичным образом можно доказать невозможность автоколебаний в цепях, содержащих линейные резисторы, нелинейные индуктивные элементы с монотонно возрастающей, однозначной дифференцируемой вебер-амперной характеристикой и источники постоянного напряжения или тока.

Следующие примеры относятся к исследованию некоторых классов нелинейных цепей при синусоидальных воздействиях.

Известно, что если линейная цепь состоит из резисторов и индуктивностей, а на входе цепи включен источник синусоидального напря-

жения, то в установившемся режиме фазовый сдвиг между напряжением и током лежит в пределах от нуля до 90° :

$$0 \leq \alpha_u - \alpha_i \leq 90^\circ, \quad (8.14)$$

т. е. напряжение опережает ток.

Если линейные индуктивности заменить на нелинейные, то при синусоидальном входном напряжении входной периодический ток уже будет несинусоидальным. Спрашивается, будет ли по-прежнему выполняться условие (8.14), если под α_i понимать начальную фазу первой гармоники тока? Теорема Телледжена позволяет дать ответ на этот вопрос.

Пусть нелинейные индуктивности в цепи имеют однозначную неубывающую дифференцируемую вебер-амперную характеристику. Запишем теорему Телледжена в следующей форме:

$$\sum_k u_k \frac{di_k}{dt} = 0. \quad (8.15)$$

Здесь u_k и i_k — периодические функции с периодом T .

Из (8.15) получаем

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_k u_k \frac{di_k}{dt} \right] dt = 0. \quad (8.16)$$

Рассмотрим вначале в (8.16) слагаемое, соответствующее источнику напряжения. Пусть это будет слагаемое при $k = 1$. Тогда

$$u_1(t) = U_m \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha_u \right).$$

Пусть входной ток $i_1(t)$ имеет первую гармонику, равную

$$-I_m \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha_i \right).$$

Знак минус появился по той причине, что при формулировании теоремы Телледжена согласованное направление токов и напряжений ветвей взято таким, как на рис. 8.1. На практике же ток источника обычно направляют в противоположную сторону. Тогда слагаемое при $k = 1$ в (8.16) будет

$$- \frac{U_m I_m}{2} \frac{2\pi}{T} \cos(\alpha_u - \alpha_i - 90^\circ) = - \frac{U_m I_m}{2} \frac{2\pi}{T} \sin(\alpha_u - \alpha_i). \quad (8.17)$$

Рассматривая в (8.16) слагаемые, соответствующие резисторам, и рассуждая так же, как в предыдущем примере, найдем, что эти слагаемые равны нулю.

Пусть теперь в (8.16) некоторое $k = \mu$ соответствует нелинейной индуктивности с вебер-амперной характеристикой $\psi_\mu(i_\mu)$. Тогда

$$u_\mu = \frac{d}{dt} \psi_\mu(i_\mu) = \frac{\partial \psi_\mu(i_\mu)}{\partial i_\mu} \frac{di_\mu}{dt}; \quad \frac{\partial \psi_\mu(i_\mu)}{\partial i_\mu} \geq 0.$$

Отсюда m -е слагаемое в (8.16) будет

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \psi_\mu(i_\mu)}{\partial i_\mu} \left(\frac{di_\mu}{dt} \right)^2 dt \geq 0. \quad (8.18)$$

Таким образом, в (8.16) все слагаемые в совокупности приводят к равенству

$$-\frac{U_m I_m}{2} - \frac{2\pi}{T} \sin(\alpha_u - \alpha_i) + A = 0,$$

где $A \geq 0$.

Отсюда

$$\sin(\alpha_u - \alpha_i) \geq 0. \quad (8.19)$$

Рассмотрим теперь баланс активных мощностей в цепи. Активная мощность на входе

$$P_{\text{вх}} = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\alpha_u - \alpha_i).$$

Активная мощность в резисторах неотрицательна. Покажем, что активная мощность в нелинейных индуктивных элементах равна нулю (пусть снова напряжение и ток в некоторой индуктивности помечены индексом μ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T u_\mu i_\mu dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \psi_\mu(i_\mu)}{\partial i_\mu} \frac{di_\mu}{dt} i_\mu dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f_\mu(i_\mu) \frac{di_\mu}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_{i_\mu(0)}^{i_\mu(T)} f_\mu(i_\mu) di_\mu = 0, \end{aligned}$$

так как в силу периодичности тока верхний и нижний пределы в последнем интеграле одинаковы. Таким образом, из уравнения баланса активных мощностей получаем

$$\frac{U_m I_m}{2} \cos(\alpha_u - \alpha_i) \geq 0,$$

откуда

$$\cos(\alpha_u - \alpha_i) \geq 0. \quad (8.20)$$

Из неравенств (8.19) и (8.20) следует, что
 $0 \leq \alpha_u - \alpha_i \leq 90^\circ$,

т. е. то же соотношение, что и для линейных цепей.

Рассмотрим еще один пример цепи, находящейся под синусоидальным воздействием $u(t) = U_m \sin \omega t$. Пусть цепь содержит произвольное число линейных индуктивных, емкостных элементов и нелинейных элементов резисторов и в цепи установился периодический режим с периодом, равным периоду внешнего воздействия. Запишем теорему Телледжена в следующей форме:

$$\sum_k \frac{du_k}{dt} \frac{di_k}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_k \frac{du_k}{dt} \frac{di_k}{dt} \right] dt = 0. \quad (8.21)$$

Рассмотрим по отдельности слагаемые в (8.21), относящиеся к источнику напряжения, индуктивным, емкостным элементам и резисторам. Пусть индекс $k=1$ относится к источнику, т. е. $u_1(t) = u(t) = U_m \sin \omega t$, а $i_1(t)$ — входной ток. Пусть первая гармоника входного тока равна $I_m \sin(\omega t + \alpha)$. Тогда активная мощность на входе цепи, т. е. средняя мощность, отдаваемая источником и потребляемая цепью, будет

$$P = - \frac{U_m I_m}{2} \cos \alpha. \quad (8.22)$$

Напомним, что знак минус здесь объясняется тем, что направление тока источника в теореме Телледжена предполагается противоположным общепринятому.

Слагаемое в (8.21), соответствующее $k=1$, равно

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{du_1}{dt} \frac{di_1}{dt} dt = \omega^2 \left(- \frac{U_m I_m}{2} \cos \alpha \right). \quad (8.23)$$

Сравнивая (8.22) и (8.23), получаем, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{du_1}{dt} \frac{di_1}{dt} dt = \omega^2 P. \quad (8.24)$$

Пусть теперь индекс $k = \mu$ соответствует в (8.21) индуктивности L_μ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{du_\mu}{dt} \frac{di_\mu}{dt} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{du_\mu}{dt} \frac{1}{L_\mu} u_\mu dt = \\ &= \frac{1}{TL_\mu} \int_{u_\mu(0)}^{u_\mu(T)} u_\mu du_\mu = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю следует из того, что в силу периодичности верхний и нижний пределы в последнем интеграле равны. Итак, все слагаемые в (8.21), соответствующие индуктивностям, равны.

Совершенно аналогично доказывается, что слагаемые в (8.21), соответствующие емкостям, также равны нулю. Таким образом, в (8.21) при $k > 1$ остаются лишь слагаемые, соответствующие резисторам. Поэтому окончательно получаем

$$\omega^2 P = \sum_r \frac{1}{T} \int_0^T \frac{du_r}{dt} \frac{di_r}{dt} dt$$

или

$$P = \frac{1}{\omega^2} \sum_r \frac{1}{T} \int_0^T \frac{du_r}{dt} \frac{di_r}{dt} dt. \quad (8.25)$$

Здесь суммирование ведется по всем индексам r , соответствующим резисторам. Таким образом, получен интересный результат. Вместо классической формулы активной мощности

$$P = \sum_r \frac{1}{T} \int_0^T u_r i_r dt$$

можно пользоваться формулой (8.25).

Приведем простой пример использования полученного выражения. Пусть на заданной нелинейной резистивной нагрузке требуется получить периодическое напряжение заданной формы $u(t)$. При этом источник напряжения является синусоидальным и формирование требуемого напряжения должно производиться с помощью цепи, включенной между источником и нагрузкой. Из вышесказанного ясно, что поставленная задача разрешима только в том случае, если выполняется равенство

$$\int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{\omega^2} \int_0^T \frac{du(t)}{dt} \frac{di(t)}{dt} dt ,$$

где $u(t)$ и $i(t)$ — напряжение и ток на нелинейном резисторе.

Ток $i(t)$ можно вычислить по заданным $u(t)$ и вольт-амперной характеристике нелинейного резистора.

Приведенные примеры далеко не исчерпывают всего многообразия возможностей теоремы Телледжена. В настоящее время в литературе приведено значительное число теорем, описывающих свойства электрических цепей и опирающихся на теорему Телледжена [28]. Тем не менее, можно не сомневаться, что теорема Телледжена и в будущем позволит обнаружить и обосновать многие полезные свойства линейных и нелинейных электрических цепей.

8.3. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОНВЕРГЕНТНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Линейные электрические цепи, состоящие из элементов R , L , C , обладают одним замечательным свойством, которое не всегда подчеркивается и порой воспринимается как само собой разумеющееся. Речь идет о независимости вынужденного периодического режима от начальных условий.

Пусть $x(t)$ — некоторое воздействие на линейную R , L , C -цепь, $y_1(t)$ — реакция цепи на некоторых начальных условиях, а $y_2(t)$ — реакция цепи при других начальных условиях. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_1(t) - y_2(t)| = 0. \quad (8.26)$$

Это условие выполняется для всех реально существующих R , L , C , M -цепей. Для того чтобы это условие имело место и для математических моделей, описывающих цепи, необходимо исключить лишь один идеальный случай. Пусть $y(t)$ — реакция цепи при нулевых начальных условиях. образуем функцию передачи цепи

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} .$$

Для того чтобы выполнялось условие (8.26), необходимо и достаточно, чтобы все полюсы передаточной функции $H(p)$ лежали строго в левой полуплоскости. Так как для R , L , C , M -цепей полюсы функции передачи не могут лежать в правой полуплоскости, то указанное требование означает отсутствие полюсов функции $H(p)$ на мнимой оси.

Свойство (8.26) часто называют свойством конвергентности. Это свойство полезно как в расчетном, так и в практическом плане. При

расчете установившегося режима с учетом переходного процесса можно не заботиться о специальном выборе начальных условий: любые начальные условия приведут к одному и тому же установившемуся режиму. С практической точки зрения свойство конвергентности делает цепи надежнее, так как инженер уверен, что никакие случайные кратковременные изменения в цепи не изменят установившегося режима.

При переходе к нелинейным цепям свойство конвергентности в общем случае не выполняется. Существуют цепи, в которых имеют место несколько установившихся режимов в зависимости от различных начальных условий. Такое свойство цепей может быть полезным, например, при создании многоустойчивых элементов вычислительной техники, а может быть нежелательным, и приходится применять специальные меры для исключения этого свойства.

Существуют классы нелинейных цепей, для которых конвергентность была бы весьма желательна, так как сделала бы эти цепи надежнее. К таким цепям относятся, например, функциональные преобразователи, выпрямители, нелинейные корректоры, умножители частоты и т. д. Поэтому целесообразно сформулировать признаки принадлежности цепей к конвергентным с тем, чтобы по этим признакам можно было заранее, без длинных вычислений определять соответствующие свойства цепи. В основе приведенных ниже рассуждений, как и в предыдущем параграфе, лежат энергетические соображения.

Дадим определение конвергентности для нелинейных цепей. Прежде всего отметим, что во многих случаях не обязательно требовать выполнения свойства, подобного (8.26), для токов и напряжений всех ветвей цепи. Интерес представляют обычно лишь некоторые, выделенные ветви и выводы, являющиеся входными и выходными.

Поэтому будем обозначать вектор-функцию входных воздействий через $x(t)$, а вектор-функцию выделенных реакций через $y(t)$ и говорить, что цепь является конвергентной по отношению к выделенным реакциям, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ||y_1(t) - y_2(t)|| = 0, \quad (8.27)$$

где $y_1(t)$ — реакция цепи при одних произвольных начальных условиях, $y_2(t)$ — реакция цепи при других начальных условиях.

Свойство (8.27) должно выполняться при любых внешних воздействиях $x(t)$.

Норма в (8.27) может быть выбрана различными способами в зависимости от условий задачи.

Так как в дальнейшем всегда будут рассматриваться реакции только по отношению к выделенным зажимам, то цепи, удовлетворяющие (8.27), будем называть просто конвергентными.

Отметим, что из условия (8.27) не следует, что и остальные реакции цепи обладают подобным свойством. Приведем простой пример. Пусть

в цепи содержится контур, состоящий из одних индуктивных элементов и источников напряжения. В таком контуре может циркулировать произвольной величины постоянный ток; следовательно, для токов ветвей, входящих в контур, условие (8.27) не будет выполнено.

Опишем вначале идею исследования конвергентности на примере цепи, изображенной на рис. 8.5. В этой цепи, состоящей из последовательного соединения линейного двухполюсника $Z(p)$ и нелинейного резистора, воздействием считаем источник напряжения $u(t)$, а реакцией — ток $i(t)$. Предположим, что двухполюсник $Z(p)$ состоит из элементов R, L, C, M , а вольт-амперная характеристика нелинейного резистора $i = f(u_n)$ является неубывающей. Отсюда следует, что при любых x_1 и x_2

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0. \quad (8.28)$$

Отсюда разности $x_1 - x_2$ и $f(x_1) - f(x_2)$ всегда имеют один и тот же знак.

Кроме того, будем считать, что функция f удовлетворяет условию Липшица

$$f(x_1) - f(x_2) \leq \lambda(x_1 - x_2).$$

Здесь λ — положительное число.

Составим уравнение цепи, введя оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$. Тогда уравнение сможем записать так:

$$Z(p)i(t) + u_n(t) = u(t). \quad (8.29)$$

Пусть при некоторых произвольных начальных условиях реакция цепи равна $i_1(t)$; соответственно этому напряжение на нелинейном резисторе равно $u_{n1}(t)$. Обозначим соответствующие реакции для других начальных условий через $i_2(t)$ и $u_{n2}(t)$. Составим уравнения для того и другого случая:

$$Z(p)i_1(t) + u_{n1}(t) = u(t); \quad (8.30)$$

$$Z(p)i_2(t) + u_{n2}(t) = u(t) \quad (8.31)$$

и вычтем второе уравнение из первого:

$$Z(p)[i_1(t) - i_2(t)] + u_{n1}(t) - u_{n2}(t) = 0. \quad (8.32)$$

Рассмотрим физическую интерпретацию полученного уравнения. Первое слагаемое в левой части — это напряжение на нелинейном двух-

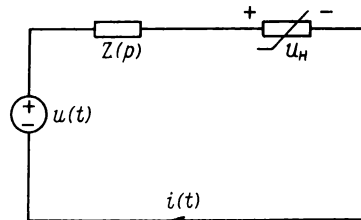


Рис. 8.5

полюснике, когда через него протекает ток $i_1(t) - i_2(t)$. При этом начальные условия на двухполюснике соответствуют разности первых и вторых начальных условий, т. е., если в первом случае, описываемом уравнением (8.30), начальное напряжение на некоторой емкости C_k было равно u_{Ck1} , а во втором случае u_{Ck2} , то для двухполюсника, описываемого уравнением (8.32), начальное напряжение на соответствующей емкости равно $u_{Ck1} - u_{Ck2}$.

Вторую разность в левой части (8.32) можно рассматривать как напряжение на некотором нелинейном элементе, через который протекает ток $i_1(t) - i_2(t)$. Основное свойство этого элемента — пассивность, т. е. элемент может только потреблять мощность. Действительно, мощность на элементе

$$P_H = (u_{H1} - u_{H2}) (i_1 - i_2) = (u_{H1} - u_{H2}) [f(u_{H1}) - f(u_{H2})] \geq 0$$

согласно (8.28).

Таким образом, в цепь, описываемую уравнением (8.32), включены последовательно линейный двухполюсник, не содержащий по условию источников напряжения или тока, и элемент, не генерирующий энергию. Следовательно, на выводах линейного двухполюсника не может выделяться больше энергии, чем ее было накоплено в индуктивностях и емкостях вследствие ненулевых начальных условий. Поэтому и в пассивном элементе не может выделяться больше этого количества энергии. Математически этот факт выражается так: при любом $t > 0$

$$\int_0^t [u_{H1}(t) - u_{H2}(t)] [i_1(t) - i_2(t)] dt \leq c, \quad (8.33)$$

где c — некоторая константа, не зависящая от t , а зависящая только от начальных условий в линейном двухполюснике.

Учитывая (8.29), получим из (8.33)

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^t [i_1(t) - i_2(t)]^2 dt \leq c. \quad (8.34)$$

Если теперь в качестве меры близости токов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ при $t \rightarrow \infty$ принять величину

$$||i_1(t) - i_2(t)|| = \sqrt{\int_t^\infty [i_1(t) - i_2(t)]^2 dt},$$

то из (8.34) следует, что

$$||i_1(t) - i_2(t)|| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$$

т. е. цепь конвергентна по отношению ко входному току.

Отметим, что если в качестве реакции цепи принять напряжение u_n на нелинейном резисторе, то цепь не обязательно будет конвергентной. Условия (8.28) и (8.29) не исключают наличия горизонтальных участков на вольт-амперной характеристике нелинейного резистора (рис. 8.6). Поэтому, если параметры цепи и источник напряжения выбраны так, что при $t \rightarrow \infty$ $i(t) \rightarrow I$, то напряжение на нелинейном элементе может принимать любые значения между u_1 и u_2 .

Полученный результат нетрудно обобщить на тот случай, когда рассматривается не одна, а несколько реакций в цепи. Пусть задана цепь, содержащая произвольное число источников напряжения и тока, линейных элементов R, L, C, M и двухполюсных линейных резисторов. В качестве реакции цепи будем рассматривать токи через нелинейные резисторы $i_1(t), i_2(t), \dots, i_n(t)$.

Пусть $i'(t)$ — вектор-функция реакций при некоторых начальных условиях:

$$i'(t) = [i'_1(t) \ i'_2(t) \ \dots \ i'_n(t)]^T,$$

а $i''(t)$ — вектор-функция тех же реакций при других начальных условиях:

$$i''(t) = [i''_1(t) \ i''_2(t) \ \dots \ i''_n(t)]^T.$$

Мерой близости вектор-функций при $t \rightarrow \infty$ будем считать величину

$$||i'(t) - i''(t)|| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \int_t^{\infty} [i'_k(t) - i''_k(t)]^2 dt}.$$

Пусть $i = f_k(u)$ — вольт-амперная характеристика k -го нелинейного резистора, $k = 1, 2, \dots, n$, и каждая из функций f_k удовлетворяет условиям (8.28) и (8.29).

Тогда почти дословным повторением предыдущих рассуждений можно показать, что рассматриваемая цепь будет конвергентной, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ||i'(t) - i''(t)|| = 0.$$

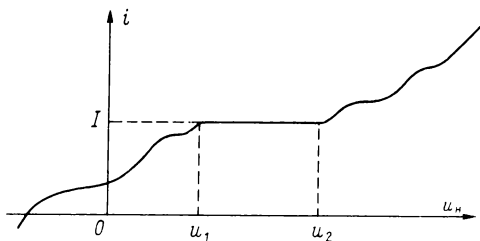


Рис. 8.6

До сих пор предполагалось, что линейная часть цепи содержит элементы R, L, C, M . Можно доказать аналогичный результат и для некоторых классов цепей, содержащих активные элементы, например усилители. В этом случае необходимо наложить определенные ограничения на линейную часть цепи.

Рассмотрим снова цепь, содержащую произвольное число независимых источников, линейных элементов R, L, C, M , а также линейных управляемых источников. Пусть цепь содержит также n нелинейных двухполюсных резисторов, вольт-амперные характеристики которых $i = f_k(u)$, $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют условиям (8.28) и (8.29). Закоротим независимые источники напряжения, оборвем ветви с независимыми источниками тока и будем рассматривать линейную цепь относительно точек присоединения нелинейных резисторов, как линейный $2n$ -полюсник. Предположим, что он удовлетворяет следующим условиям:

- а) существует матрица сопротивлений этого многополюсника $\mathbf{Z}(p)$;
- б) элементы $Z_{ik}(p)$ матрицы $\mathbf{Z}(p)$ — дробно-рациональные функции p , все полюсы которых лежат в левой полуплоскости; $i, k = 1, 2, \dots, n$;
- в) матрица Эрмита

$$\mathbf{Z}(j\omega) + [\mathbf{Z}(-j\omega)]^T$$

является положительно полуопределенной при любом $\omega \geq 0$.

При этих условиях в теории линейных цепей [18] доказывается, что при любых начальных условиях энергия, генерируемая (именно генерируемая, а не потребляемая!) на всех выводах многополюсника, не может при любом $t > 0$ превысить некоторой константы c , не зависящей от времени, а зависящей только от начальных условий.

Но в таком случае можно снова повторить предыдущие рассуждения и доказать, что рассматриваемая цепь является конвергентной по отношению к токам, протекающим через нелинейные элементы.

В литературе, особенно математической, встречается определение конвергентности, накладывающее более жесткие требования. Именно, цепь называется конвергентной, если:

1. При периодическом воздействии с периодом T установившаяся реакция также является периодической с тем же периодом.
2. Имеет место свойство (8.27).

Можно показать [13], что при тех условиях, которые выше были наложены на конвергентные цепи, выполняется как свойство 1, так и свойство 2, т. е. рассмотренные выше цепи конвергентны и при другом определении конвергентности.

8.4. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

В предыдущем параграфе рассмотрены цепи, в которых периодический режим устойчив в большом, т. е. при любых начальных условиях реакция цепи при $t \rightarrow \infty$ стремится к периодической функции и эта периодическая функция не зависит от начальных условий. В частности, если внешнее воздействие равно нулю, то и реакция при любых начальных условиях стремится к нулю. В последнем случае говорят, что цепь имеет устойчивое положение равновесия.

Однако, если интересоваться только положением равновесия в цепи, не заботясь о реакциях на другие воздействия, то можно получить значительно более сильные условия устойчивости. Важность получения таких условий очевидна. Очень многие цепи работают при импульсных воздействиях, и требуется, чтобы цепь вернулась в исходное состояние по истечении некоторого времени независимо от вида приложенного импульса. На практике требуется даже большее. Так как точно реализовать параметры цепи, рассчитанной теоретически, не удастся, то нужно получить условие устойчивого равновесия не для конкретной цепи, а для множества цепей, полученных из исходной произвольным изменением параметров в некоторых пределах.

Дадим точную постановку задачи для цепи, представляющей собой последовательное соединение линейного двухполюсника $Z(p)$ и нелинейного резистора (рис. 8.7). Пусть при нулевых начальных условиях ток $i(t)$ равен нулю. Этот режим будем называть асимптотически устойчивым в целом, когда выполняется следующее условие: если $i(t)$ — ток в цепи при произвольных начальных условиях, то $i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, приведенное определение относится к цепи с фиксированными параметрами элементов. При конкретной реализации цепи обычно труднее всего реализовать с заданной точностью нелинейную характеристику. Поэтому будем рассматривать класс цепей, в которых $Z(p)$ — фиксированное сопротивление линейной части цепи, а вольт-амперная характеристика $i = \varphi(u)$ нелинейного резистора принадлежит некоторому множеству характеристик M ,

$$\varphi(u) \in M. \quad (8.35)$$

Будем говорить, что для рассматриваемого класса цепей имеет место абсолютная устойчивость, если для любой цепи этого класса ток в ней удовлетворяет условию устойчивости в целом.

Конкретизируем условия, наложенные на линейную и нелинейную части

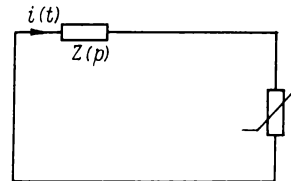


Рис. 8.7

цепи. Будем считать, что $Z(p)$ — дробно-рациональная функция с вещественными коэффициентами, у которой все полюсы лежат строго в левой полуплоскости. Условие (8.35) конкретизируем следующим образом. Пусть $\varphi(u)$ — произвольная однозначная кусочно-непрерывная функция, определенная при любом u и удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 0$. Множество M в (8.35) зададим следующими условиями. Функция $\varphi(u)$ должна удовлетворять неравенствам

$$0 \leq \frac{\varphi(u)}{u} \leq k, \quad (8.36)$$

где k — положительное фиксированное число. Возможно и $k = \infty$.

Для цепей описанного вида имеет место следующий частотный критерий абсолютной устойчивости, полученный В. М. Поповым [1]. Для того чтобы любая цепь из вышеописанного класса была абсолютно устойчивой, достаточно, чтобы существовало такое вещественное число q , при котором при любом $\omega \geq 0$ выполняется условие

$$\operatorname{Re}(1 + jq\omega)Z(j\omega) + \frac{1}{k} > 0. \quad (8.37)$$

Не приводя полного доказательства теоремы В. М. Попова (оно имеется, например, в [1]), отметим лишь главные его черты, опирающиеся на энергетические соображения, подобные тем, что указаны в предыдущем параграфе.

Составим уравнение цепи рис. 8.7:

$$Z(p)i + u_H = 0, \quad p = \frac{d}{dt}; \quad (8.38)$$

здесь u_H — напряжение на нелинейном резисторе.

Продифференцируем обе части равенства:

$$pZ(p)i + \frac{du_H}{dt} = 0. \quad (8.39)$$

Умножим (8.39) на некоторое число q и сложим с (8.38):

$$[Z(p) + qpZ(p)]i + u_H + q \frac{du_H}{dt} = 0. \quad (8.40)$$

Так как $i = \varphi(u_H)$, то (8.40) можно переписать так:

$$\left[Z(p) + qpZ(p) + \frac{1}{k} \right] \varphi(u_H) + u_H - \frac{1}{k} \varphi(u_H) + q \frac{du_H}{dt} = 0. \quad (8.41)$$

Это уравнение — основной объект исследования.

Будем пока считать, что $q > 0$. Пусть при этом q выполнено условие (8.37). Тогда вследствие того, что все полюсы $Z(p)$ лежат строго в ле-

вой полуплоскости, функция $Z_1(p) = Z(p) + qpZ(p) + \frac{1}{k}$ является положительной вещественной функцией — ПФФ [25]. Поэтому член $Z_1(p)\varphi(u_H)$ в уравнении (8.41) можно трактовать как напряжение на линейном двухполюснике с сопротивлением $Z_1(p)$ при токе $i = \varphi(u_H)$. Поскольку $Z_1(p)$ есть ПФФ, можно показать, что энергия, генерируемая на выводах такого двухполюсника, не может превосходить некоторого постоянного значения C , зависящего от начальных условий в цепи.

Уравнение (8.41) можно трактовать как описывающее последовательное соединение трех двухполюсников: двухполюсника $Z_1(p)$, двухполюсника с напряжением $u_H - \frac{1}{k} \varphi(u_H)$ и двухполюсника с напряжением $q \frac{du_H}{dt}$.

Покажем, что двухполюсник с напряжением $u_H - \frac{1}{k} \varphi(u_H)$ является пассивным. Мощность, выделяемая на нем, равна

$$i \left[u_H - \frac{1}{k} \varphi(u_H) \right] = \varphi(u_H) \left[u_H - \frac{1}{k} \varphi(u_H) \right].$$

Согласно (8.36) это выражение неотрицательно, т. е. двухполюсник может только потреблять энергию.

Рассмотрим энергию, выделяемую на выводах третьего двухполюсника:

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^t i(t) q \frac{du_H(t)}{dt} dt = q \int_0^t \varphi(u_H) \frac{du_H}{dt} dt = \\ &= q \int_{\varphi(0)}^{\varphi[u_H(t)]} \varphi(u_H) du_H = -q \int_0^{\varphi(0)} \varphi(u_H) du_H + \int_0^{\varphi[u_H(t)]} \varphi(u_H) du_H. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Так как в соответствии с (8.36) функция $\varphi(u_H)$ целиком расположена в первом и третьем квадрантах, то последнее слагаемое в (8.42) неотрицательно. Верхний предел в нем зависит только от начальных условий. Таким образом, если энергия $w(t)$ может быть отрицательной, то абсолютное значение ее не может превышать некоторую константу c_1 , зависящую от начальных условий и не зависящую от t .

Итак, цепь, описываемая уравнением (8.41), состоит из элементов, которые за весь промежуток времени от 0 до ∞ способны генери-

ровать лишь конечное количество энергии. Отсюда и можно сделать вывод, что ток в такой цепи должен стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. Строгое доказательство этого факта приведено, как отмечалось, в [1]. Там же показано, что с помощью простых преобразований случай $q < 0$ можно свести к случаю $q > 0$. Кроме того, в [1] отдельно рассмотрен пример, когда не все полюсы $Z(p)$ лежат строго в левой полуплоскости, а часть из них лежит на мнимой оси.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

9.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Под синтезом нелинейных резистивных цепей обычно понимают построение электрической цепи, содержащей в общем случае нелинейные резисторы, усилители, источники постоянного напряжения и тока и обладающей требуемой зависимостью вектора выходных сигналов y от вектора входных сигналов x

$$y = f(x). \quad (9.1)$$

Устройства, осуществляющие преобразования вида (9.1), часто называют функциональными преобразователями. Таким образом, нелинейные резистивные цепи — это частный случай функциональных преобразователей. Другими примерами функциональных преобразователей являются цифровые преобразователи, аналого-цифровые преобразователи, резистивные цепи с переменными параметрами.

Бесспорно, что благодаря развитию современной микропроцессорной техники и широкому применению ЭВМ имеется возможность строить специализированные и универсальные цифровые и аналого-цифровые преобразователи, реализующие с высокой точностью соотношения вида (9.1). Однако это не означает, что функциональные преобразователи на базе нелинейных резистивных цепей утратили свою роль. Они имеют свои достоинства, связанные с большим быстродействием, простотой, надежностью. Поэтому в тех задачах, где указанные качества имеют важное значение и не требуется очень высокой точности преобразования, функциональные преобразователи на базе нелинейных резистивных цепей находят широкое применение.

В первую очередь это относится к резистивным двухполюсникам, реализующим заданные вольт-амперные характеристики. Такие двух-

полюсники строятся обычно из простейших базисных элементов: диодов, линейных резисторов, источников постоянного напряжения и тока, усилителей. Представляя как самостоятельные объекты довольно ограниченный интерес, такие двухполюсники широко используются в качестве элементов при синтезе более сложных функциональных преобразователей, а также при синтезе цепей, в которые наряду с резистивными входят и реактивные элементы.

9.2. СИНТЕЗ РЕЗИСТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ, ИМЕЮЩИХ ЗАДААННЫЕ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Пусть требуется построить цепь, содержащую безынерционные элементы и представляющую собой двухполюсник, у которого входное напряжение и входной ток связаны заданной зависимостью

$$u = f(i). \quad (9.2)$$

Вместо (9.2) может быть задана зависимость тока от напряжения $i = \varphi(u)$. (9.3)

Решение поставленной задачи существенно зависит от трех факторов:

1. Является ли зависимость (9.2) или (9.3) однозначной, т. е. однозначно ли определены функции f и φ по заданным i и u соответственно. Если такой однозначности нет, например функции f и φ имеют гистерезисный характер, то решение задачи заметно усложняется. В дальнейшем будем предполагать, что характеристики f и φ однозначны.

2. От вида аппроксимации. Не всегда возможно построение цепи, точно осуществляющей заданное преобразование (9.2) или (9.3). Поэтому вначале решают задачу аппроксимации, т. е. определения таких функций f_1 и φ_1 , которые, с одной стороны, удовлетворяли бы неравенству

$$\max_{i \in I} |f(i) - f_1(i)| \leq \epsilon_1 \quad (9.4)$$

или

$$\max_{u \in U} |\varphi(u) - \varphi_1(u)| \leq \epsilon_2 \quad (9.5)$$

($\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ — достаточно малые числа), а с другой — позволили бы построить двухполюсник с заданным элементарным базисом, имеющий характеристику

$$u = f_1(i)$$

или

$$i = \varphi_1(u).$$

3. От того, какой элементный базис выбран при синтезе цепи.

Рассмотрим вначале наиболее разработанный случай, когда применяется кусочно-линейная аппроксимация вольт-амперных характеристик, а в качестве элементного базиса выбраны постоянные резисторы, источники постоянного напряжения и тока, усилители и диоды. Диоды предполагаются идеальными, т. е. сопротивление их в проводящем направлении предполагается равным нулю, а в обратном — бесконечности.

Хотя проблема кусочно-линейной аппроксимации представляет самостоятельный интерес, однако она является чисто математической. Поэтому будем считать, что аппроксимация вольт-амперной характеристики кусочно-линейной функцией уже осуществлена, и сосредоточим внимание на самой задаче синтеза.

Простейшая кусочно-линейная функция состоит из двух линейных участков. На рис. 9.1, а изображена такая функция и электрическая цепь, имеющая соответствующую вольт-амперную характеристику. На рис. 9.1, б показана другая цепь и соответствующая ей функция $1/R = \tan \alpha$.

Из функций, подобных приведенным, можно, как из кирпичиков, конструировать более сложные, монотонно возрастающие функции. Пусть, например, требуется построить монотонно возрастающую функцию, имеющую монотонно возрастающую производную (рис. 9.2, а,

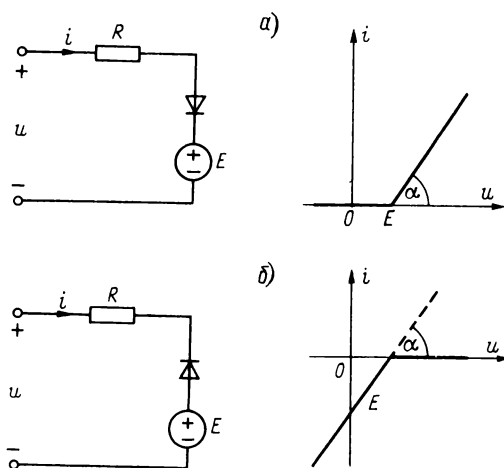


Рис. 9.1

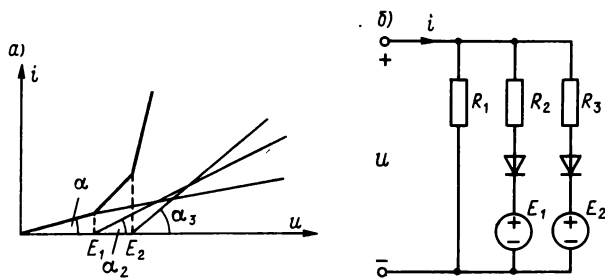


Рис. 9.2

жирная линия). На рис. 9.2, б изображена соответствующая цепь, причем $R_1^{-1} = \operatorname{tg} \alpha_1$, $R_2^{-1} = \operatorname{tg} \alpha_2$, $R_3^{-1} = \operatorname{tg} \alpha_3$. Идея построения цепи ясна из рис. 9.2, а, где тонкие линии соответствуют вольт-амперным характеристикам каждой из параллельных цепочек рис. 9.2, б.

Пусть теперь требуется построить монотонно возрастающую функцию, имеющую монотонно убывающую производную (рис. 9.3, а, жирная линия). Соответствующая цепь изображена на рис. 9.3, б, причем $R_1^{-1} = \operatorname{tg} \alpha_1$, $R_2^{-1} = \operatorname{tg} \alpha_2$, $R_3^{-1} = \operatorname{tg} \alpha_3$. Тонкие линии на рис. 9.3, а соответствуют вольт-амперным характеристикам каждой из параллельных цепочек рис. 9.3, б.

Аналогично синтезируется цепь с монотонно возрастающей характеристикой, имеющей немонотонную производную. Такая характеристика показана на рис. 9.4, а. На рис. 9.4, б приведена соответствующая цепь, причем $R_1^{-1} = \operatorname{tg} \alpha_1$, $R_2^{-1} = \operatorname{tg} \alpha_2$, $R_3^{-1} = \operatorname{tg} \alpha_3$. Тонкие линии на рис. 9.4, а соответствуют вольт-амперным характеристикам каждой из параллельных цепочек рис. 9.4, б.

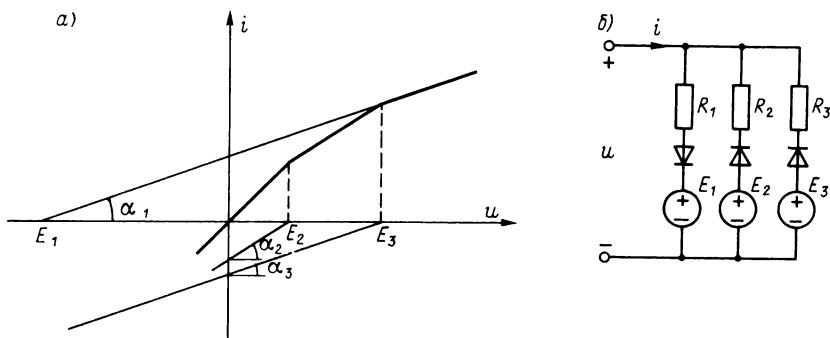


Рис. 9.3

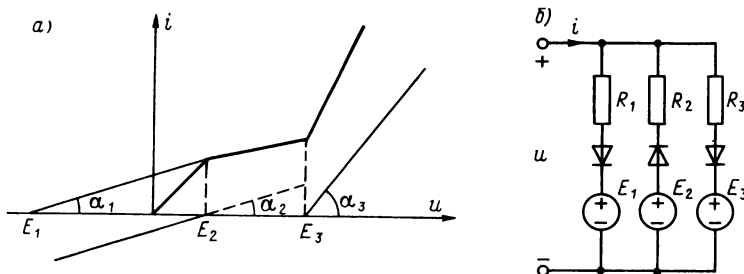


Рис. 9.4

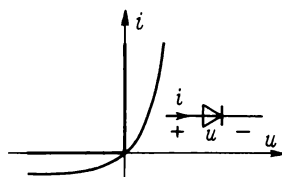


Рис. 9.5

Таким образом, если вольт-амперные характеристики монотонно возрастают, то соответствующие им цепи в качестве элементного базиса содержат только линейные резисторы, диоды и источники постоянного напряжения. Если же характеристики имеют падающие участки, то необходимо дополнить элементный базис усилителями. Однако усилители могут быть полезны и для синтеза цепей с монотонно возрастающими характеристиками. Дело в том, что на практике характеристики искажаются вследствие того, что диоды не являются идеальными. Их реальные вольт-амперные характеристики подобны той, что проведена на рис. 9.5 тонкой линией. Там же приведена и идеальная характеристика (жирная линия). Усилитель позволяет так преобразовать реальную характеристику, что она становится ближе к идеальной.

На рис. 9.6, а приведена схема, в которой реальный диод включен в цепь обратной связи операционного усилителя. Схема замещения цепи приведена на рис. 9.6, б, причем для операционного усилителя можно считать, что $k \rightarrow \infty$. Если $u < E$, то $u_0 < 0$ и $ku_0 < 0$, т. е. к диоду приложено большое отрицательное напряжение и он заперт. Если же

$u > E$, то $u_0 > 0$, $ku_0 > 0$, $i = \frac{ku_0 + u}{R}$. Таким образом ввиду боль-

шого k ток i также заметно увеличивается, что соответствует тому, что реальная характеристика диода (тонкая линия в первом квадранте на рис. 9.5) становится гораздо круче и "прижимается" к идеальной характеристике. Поэтому цепь на рис. 9.6, а, несмотря на то, что харак-

теристика диода отличается от идеальной, имеет входную вольт-амперную характеристику, близкую к той, что показана на рис. 9.1, а.

Если для цепей с возрастающими характеристиками усилители нужны лишь для увеличения точности аппроксимации, то при синтезе цепей с убывающими характеристиками, как уже отмечалось, без усилителей в принципе не обойтись. Объясняется это тем, что падающие участки соответствуют отрицательному дифференциальному сопротивлению, которое реализовать пассивными цепями невозможно.

На рис. 9.7 приведена простейшая характеристика с падающим участком и электрическая цепь с операционными усилителями, реализующая эту характеристику. Анализ цепи показывает, что если принять $R_2 \ll R_1$, то $\operatorname{tg} \alpha = -R_2/(R_1 R)$. На рис. 9.8 приведена другая простейшая характеристика, имеющая падающий участок, и цепь с операционными усилителями, реализующая такую характеристику, причем $\operatorname{tg} \alpha = -R_2/(R_1 R)$. Комбинируя последовательное и параллельное соединение цепей, подобных тем, что приведены на рис. 9.1, 9.6, 9.7 и 9.8, можно получить теоретически любую кусочно-линейную вольт-амперную характеристику.

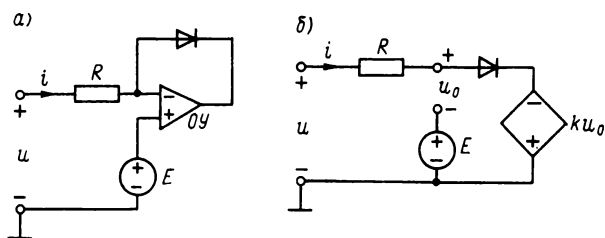


Рис. 9.6

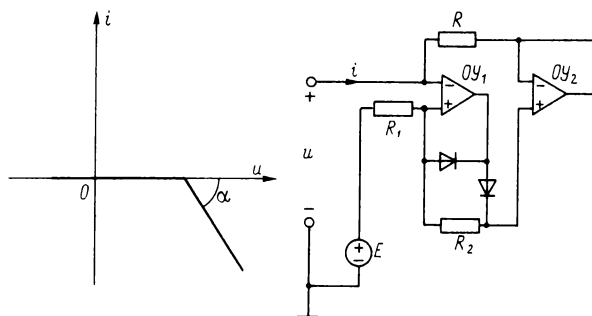


Рис. 9.7

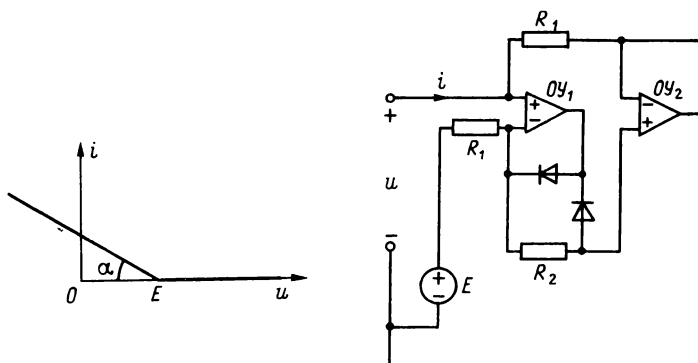


Рис. 9.8

Как уже отмечалось, цепи с рассматриваемым элементарным базисом не претендуют на высокую точность реализации характеристик, поэтому не имеет смысла добиваться и высокой точности аппроксимации характеристик. Обычно достаточно бывает ограничиться не более чем 3–4 звеньями ломаной линии при кусочно-линейной аппроксимации.

Однако в ряде случаев кусочно-линейная аппроксимация может все же оказаться недостаточной и возникает необходимость синтезировать цепь, у которой входная характеристика не только сама непрерывна, но и имеет непрерывными несколько первых производных (гладкие характеристики). В этом случае применяются другие методики синтеза. Одна из них состоит в том, что в качестве исходных "кирпичиков" применяются нелинейные резистивные элементы с произвольными, но гладкими характеристиками.

Такие элементы выбираются из числа тех, что производятся промышленностью. Затем строятся цепи, деформирующие эти характеристики так, чтобы получилась желаемая гладкая характеристика.

Пусть, например, исходный нелинейный резистор имеет вольт-амперную характеристику, описываемую полиномом третьей степени

$$u = b_1 i + b_2 i^2 + b_3 i^3, \quad b_2, b_3 \neq 0, \quad (9.6)$$

а желаемая характеристика описывается другим полиномом третьей степени

$$u = a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3. \quad (9.7)$$

Покажем, что можно построить линейный четырехполюсник, обладающий тем свойством, что если на выход его включить резистор с характеристикой (9.6), то на входе четырехполюсника напряжение и ток будут связаны соотношением (9.7).

Запишем следующую систему уравнений

$$u_1 = \frac{a_2^3 b_3^2}{b_2^3 a_3^2} (b_1 i_2 + b_2 i_2^2 + b_3 i_2^3) + \left(\frac{a_1 a_2 b_3}{a_3 b_2} - \frac{a_2^3 b_3^2}{b_2^3 a_3^2} \right) i_2; \quad (9.8)$$

$$i_1 = 0 \cdot (b_1 i_2 + b_2 i_2^2 + b_3 i_2^3) + \frac{b_3 a_2}{b_2 a_3} i_2.$$

Можно дать следующую физическую трактовку этих уравнений. Если рассмотреть линейный четырехполюсник, у которого матрица параметров передачи равна

$$A = \begin{bmatrix} \frac{a_2^3 b_3^2}{b_2^3 a_3^2} & \frac{a_1 a_2 b_3}{a_3 b_2} - \frac{a_2^3 b_3^2}{b_2^3 a_3^2} b_1 \\ 0 & \frac{b_3 a_2}{b_2 a_3} \end{bmatrix}, \quad (9.9)$$

то система (9.8) представляет собой уравнения в форме A этого четырехполюсника для случая, когда он нагружен на выходе на нелинейный резистор с вольт-амперной характеристикой

$$u_2 = b_1 i_2 + b_2 i_2^2 + b_3 i_2^3.$$

Если из второго уравнения (9.8) выразить i_2 через i_1 и подставить в первое уравнение, то получим, что входные напряжения и ток рассматриваемого четырехполюсника связаны соотношением

$$u_1 = a_1 i_1 + a_2 i_1^2 + a_3 i_1^3.$$

Таким образом, задача синтеза сводится к построению линейного четырехполюсника, имеющего матрицу A вида (9.9). Такая задача может быть решена методами теории линейных цепей.

Другой способ синтеза, также сводящий задачу к деформации заданной характеристики с тем, чтобы получить желаемую, состоит в применении трансформирующих четырехполюсников, описанных в главе 1. При этом скаляр позволяет растягивать либо сжимать характеристику по вертикали, или по горизонтали, или по обеим осям. С помощью ротатора можно осуществить поворот характеристики относительно начала координат на заданный угол α . Рефлектор дает возможность получить отображение заданной характеристики относительно прямой линии, проходящей через начало координат под заданным углом.

9.3. СИНТЕЗ ЦЕПЕЙ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В НАПРЯЖЕНИЕ

Большинство функциональных преобразователей устроено так, что входные и выходные сигналы имеют одинаковую размерность. Чаще всего это сигналы напряжения. Хотя задача отображения напряжения в напряжение может рассматриваться как самостоятельная, однако ее обычно стараются свести к задаче синтеза вольт-амперных характеристик. Простейший подход состоит в следующем. Пусть требуется построить цепь, у которой входное напряжение u_1 связано с выходным u_2 соотношением

$$u_2 = f(u_1). \quad (9.10)$$

Строим вначале нелинейный резистивный двухполюсник, у которого вольт-амперная характеристика описывается выражением

$$i = f(u). \quad (9.11)$$

Затем включаем последовательно с найденным двухполюсником линейный резистор R , причем выбираем R достаточно малым с тем, чтобы его включение почти не изменило вольт-амперной характеристики (9.11). Тогда напряжение u_2 на резисторе R будет связано с входным напряжением u_1 соотношением

$$u_2 = R f(u_1).$$

Далее напряжение u_2 подается на усилитель с коэффициентом усиления $1/R$. Напряжение на выходе усилителя очевидно связано с напряжением на входе цепи соотношением (9.10).

Другой способ использования усилителя состоит во включении нелинейного резистора с характеристикой (9.11) в цепь обратной связи усилителя. Рассмотрим цепь с операционным усилителем, изображенную на рис. 9.9. В этой цепи нелинейный резистор имеет вольт-амперную характеристику

$$u = f(i). \quad (9.12)$$

Тогда, очевидно, напряжение u_2 в цепи будет

$$u_2 = -f(u_1). \quad (9.13)$$

Чтобы изменить знак в (9.12), можно включить на выходе цепи рис. 9.9 инвертирующий усилитель либо заменить резистор с характеристикой (9.12) на резистор с характеристикой

$$u = -f(i).$$

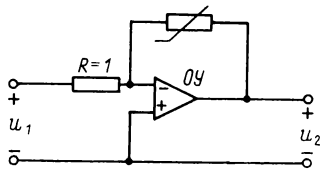


Рис. 9.9

Широко распространенными элементами аналоговой техники являются сумматоры и перемножители. Их применение затруднительно только в цепях достаточно большой мощности. Здесь целесообразно применять диодные цепи.

В маломощных же цепях сумматоры, перемножители и усилители позволяют весьма просто (по крайней мере теоретически) решать задачи синтеза функциональных преобразователей. Действительно, пусть требуется построить цепь, у которой входное и выходное напряжения связаны зависимостью (9.10). Предполагая, что f — непрерывная однозначная функция, аппроксимируем ее полиномом

$$u_2 = \sum_{k=0}^n a_k u_1^k. \quad (9.14)$$

Синтез цепи состоит в использовании перемножителей для возведения в степень входного напряжения u_1^k , усилителей для умножения на постоянные числа a_k и сумматоров. Если $a_0 \neq 0$, то потребуется еще источник постоянного напряжения $E = a_0$.

Столь же просто синтезируется цепь и в том случае, когда имеется несколько входов с напряжениями u_1, u_2, \dots, u_n и требуется получить выходное напряжение $u_{\text{вых}}$, такое, что

$$u_{\text{вых}} = f(u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (9.15)$$

Если f — однозначная непрерывная функция, то согласно теореме Стоуна — Вейерштрасса она может быть с любой точностью аппроксимирована полиномом достаточно высокой степени

$$u_{\text{вых}} = P(u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (9.16)$$

Реализация соотношения (9.16), очевидно, опять сводится к построению цепи, состоящей из перемножителей, сумматоров и усилителей.

9.4. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ВЕБЕР-АМПЕРНЫХ И КУЛОН-ВОЛЬТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАДАННОГО ВИДА К СИНТЕЗУ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Естественные вебер-амперные характеристики нелинейных катушек индуктивности и кулон-вольтовые характеристики нелинейных конденсаторов и полупроводниковых элементов имеют довольно ограниченное разнообразие форм, не всегда достаточное для практики. Поэтому можно поставить задачу синтеза цепи, у которой входное напряжение и ток были бы связаны одной из следующих зависимостей:

$$u = \frac{df(i)}{dt} \quad (9.17)$$

или

$$i = \frac{d\varphi(u)}{dt} \quad (9.18)$$

Здесь f и φ — наперед заданные функции, которые будем считать однозначными и дифференцируемыми.

Такая задача может быть решена путем использования нелинейных резисторов с вольт-амперными характеристиками вида $u = f(i)$ или $i = \varphi(u)$.

Запишем (9.17) в виде

$$u = pf(i), \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} u_1 &= pf(i_2) + 0 \cdot i_2; \\ i_1 &= 0 \cdot u_2 + i_2. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Эти уравнения можно трактовать как уравнения линейного четырехполюсника, записанные в форме A , причем матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (9.20)$$

на выходе четырехполюсника включен нелинейный резистор с характеристикой $u_2 = f(i_2)$. При этом, как видно из уравнений (9.19), входные напряжения и ток четырехполюсника связаны соотношением

$$u_1 = pf(i_1).$$

Таким образом, задача синтеза сводится к построению нелинейного резистора с характеристикой $u = f(i)$ и линейного четырехполюсника с матрицей A вида (9.20).

Аналогичным образом для построения двухполюсника с характеристикой

$$i = p\varphi(u) \quad (9.21)$$

достаточно построить линейный четырехполюсник с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

и нагрузить его на выходе нелинейным резистором с характеристикой $i_2 = \varphi(u_2)$. Тогда входные напряжение и ток четырехполюсника будут связаны соотношением (9.21).

Подход, близкий по своей идее к изложенному, связан с применением мутаторов (см. главу 1). Более общие результаты получаются, если перейти к задаче синтеза цепей с искусственными элементами, рассмотренными в главе 1.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

СИНТЕЗ ЦЕПЕЙ, ФОРМИРУЮЩИХ ЗАДАННЫЕ СИГНАЛЫ, И ЦЕПЕЙ, КОМПЕНСИРУЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ

10.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

С первого взгляда может показаться, что две задачи синтеза, вынесенные в название главы, имеют мало общего. Однако, как будет видно из нижеизложенного, между ними имеется тесная связь как по применяемому математическому аппарату, так и по способам реализации синтезируемых цепей.

Под синтезом формирующей цепи обычно понимают построение электрической цепи с заданным элементным базисом, обладающей тем свойством, что при заданном входном сигнале $x(t)$ на выходе цепи появляется желаемый сигнал $y(t)$. Начальные условия в цепи, как правило, считаются нулевыми.

Указанная задача возникает в самых различных областях техники. Наиболее известное направление исследований здесь — синтез цепей, формирующих импульсы напряжений на выходе. Такие формирующие цепи применяются в радиолокации, лазерной технике, ускорительной технике, в моделях термоядерных реакторов, технике физического эксперимента и т. д.

В последние годы все большее значение приобретает более общая задача синтеза, а именно построение цепи, осуществляющей отображение вход-выход не для одной пары сигналов $x(t) \rightarrow y(t)$, а для множества сигналов

$$x_k(t) \rightarrow y_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.1)$$

Еще более общей является задача синтеза формирующей цепи, отображающей континуальное множество входных сигналов в континуальное множество выходных

$$x(a, t) \rightarrow y(a, t); \quad (10.2)$$

здесь a — непрерывный параметр.

Если в (10.1) $n = 1$, то задача может быть решена с помощью линейных цепей. Общая идея состоит в следующем. Пусть $y(t)$ — импульс заданной формы. Находим изображение по Лапласу функций $x(t)$ и $y(t)$: пусть это будет соответственно $X(p)$ и $Y(p)$ — и образуем передаточную функцию

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (10.3)$$

Следующим шагом является аппроксимация функции $H(p)$ другой функцией $H_1(p)$, являющейся физически реализуемой в заданном элементном базисе. Третий шаг — реализация функции $H_1(p)$, т. е. построение цепи, имеющей такую передаточную функцию.

Однако существуют случаи, когда указанная задача синтеза приводит к необходимости рассматривать нелинейные цепи. Один из таких случаев — когда нагрузка формирующей цепи носит нелинейный характер. Тогда для применения вышеописанной методики необходимо включить между нагрузкой и формирующей цепью развязывающий усилитель. Однако для мощных цепей включение дополнительного усилителя может быть затруднительным. В таком случае приходится решать нелинейную задачу. Точно так же задача будет нелинейной, если в формирующую цепь специально включить нелинейные элементы. Такое включение может в ряде случаев уменьшить общее число элементов цепи (что особенно важно для мощных цепей), увеличить точность формирования выходного сигнала, упростить реализацию цепи в заданном элементном базисе и т. д. Решение задачи синтеза подобных нелинейных цепей излагается в следующем параграфе.

Если в (10.1) $n > 1$, то задача становится существенно нелинейной. Действительно, для каждой пары сигналов $x_k(t)$, $y_k(t)$ получается своя передаточная функция

$$H_k(p) = \frac{Y_k(p)}{X_k(p)},$$

поэтому одной линейной цепью в задаче синтеза в общем случае не обойтись. Задача (10.2) также приводит к необходимости синтеза нелинейной цепи. Методы синтеза таких цепей намного сложнее, чем линейных, и меньше разработаны. Здесь труднее осуществить реализацию в наперед заданном элементном базисе. К настоящему времени наи-

более развиты методы реализации цепей, содержащих наряду с элементами R , L , C также перемножители и операционные усилители. Таким образом, речь идет в основном о слаботочных цепях. Некоторые из существующих подходов к синтезу изложены в § 10.3.

В последнем параграфе описаны методы синтеза цепей, компенсирующих нелинейные искажения. Подобная задача возникает в тех случаях, когда устройство, задуманное как линейное, после его технической реализации проявляет нелинейные свойства. К примеру, усилители при нормальной работе являются линейными устройствами. Однако, если амплитуды входных сигналов превышают некоторую величину, начинается сказываться насыщение усилителя и он становится нелинейным.

В готовом устройстве, как правило, невозможно изменить значения каких-либо параметров с целью линеаризации характеристик устройства. Поэтому приходится включать дополнительные корректирующие цепи с целью подавления нелинейных свойств. Методы синтеза таких цепей изложены в последнем параграфе главы.

10.2. СИНТЕЗ ЦЕПЕЙ, ФОРМИРУЮЩИХ ЗАДАННЫЙ СИГНАЛ НА НЕЛИНЕЙНОЙ НАГРУЗКЕ

Пусть задан нелинейный резистивный двухполюсник, имеющий вольт-амперную характеристику

$$i = f(u), \quad (10.4)$$

причем f — однозначная функция.

Предположим, что поставлена задача построить электрическую цепь, нагруженную на этот двухполюсник и обладающую тем свойством, что при заданном входном напряжении цепи $u_{\text{вх}}(t)$ на нелинейном резистивном двухполюснике выделяется напряжение $u_{\text{вых}}(t)$, $t \geq 0$.

Решение задачи принципиально зависит как от структуры синтезируемой цепи и вида входящих в нее элементов, так и от заданных напряжений $u_{\text{вх}}(t)$ и $u_{\text{вых}}(t)$. Рассмотрим некоторые варианты решений.

Пусть решение описывается для цепи, изображенной на рис. 10.1. Таким образом, здесь задача состоит в построении линейного двухполюсника, обозначенного на схеме буквой Z , обеспечивающего на нелинейном резисторе заданное напряжение $u_{\text{вых}}(t)$. Если не накладывать никаких ограничений на сопротивление $Z(p)$ линейного двухполюсника, то задача решается весьма просто. Так как в (10.4) f — однозначная функция, то, подставив в (10.4) $u = u_{\text{вых}}$, найдем ток в цепи $i(t) = f[u_{\text{вых}}(t)]$. Напряжение на нелинейном двухполюснике

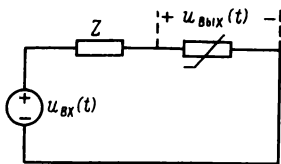


Рис. 10.1

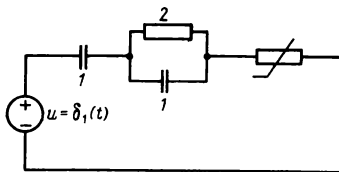


Рис. 10.2

$u_Z(t) = u_{вх}(t) - u_{ввых}(t)$. Найдем преобразование Фурье (спектр) функций $u_Z(t)$ и $i(t)$. Тогда сопротивление линейного двухполюсника будет

$$Z(j\omega) = \frac{U_Z(j\omega)}{I(j\omega)}. \quad (10.5)$$

Однако при технической реализации цепи с найденным сопротивлением могут возникнуть трудности, связанные, в частности, с обеспечением устойчивости цепи в целом. Наиболее просто обеспечить устойчивость, если потребовать, чтобы вся цепь была конвергентной. Для этого приходится накладывать дополнительные ограничения. Будем считать, что функция f в (10.4) является строго монотонно возрастающей. Тогда вся цепь будет конвергентной, если сопротивление линейного двухполюсника будет положительной вещественной функцией – ПВФ (см. главу 8). Одним из условий принадлежности функций к классу ПВФ является требование, чтобы при любом значении ω выполнялось неравенство

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0. \quad (10.6)$$

Это требование накладывает ограничения на форму входного и выходного напряжений. Действительно, из (10.5) и (10.6) следует, что должно выполняться условие

$$\operatorname{Re} \frac{U_{вх}(j\omega) - U_{вых}(j\omega)}{I(j\omega)} \geq 0. \quad (10.7)$$

Если (10.6) выполнено, то далее применяется прием, широко используемый в теории линейных цепей. С помощью ЭВМ находится дробно-рациональная функция $\tilde{Z}(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$, в которой $M(p)$ и $N(p)$ –

полиномы, обладающие следующими свойствами:

1. Корни $M(p)$ и $N(p)$ лежат в левой полуплоскости.
2. Степень $M(p)$ отличается от степени $N(p)$ не более чем на единицу.
3. В заданном диапазоне частот $\omega \in \Omega$

$$Z(j\omega) \approx \tilde{Z}(j\omega).$$

4. Во всем диапазоне частот $\operatorname{Re} \tilde{Z}(j\omega) \geq 0$. Один из алгоритмов построения таких функций изложен, например, в [2].

Выполнением перечисленных требований обеспечивается принадлежность $\tilde{Z}(p)$ к классу ПФФ. Реализация ПФФ изложена в руководствах по синтезу линейных цепей [18].

Приведем простой пример синтеза. Пусть входное напряжение цепи представляет собой единичную ступенчатую функцию $u_{\text{вх}}(t) = \delta_1(t)$, а выходное напряжение должно быть $u_{\text{вых}}(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$. При этом нелинейная резистивная нагрузка описывается монотонно возрастающей вольт-амперной характеристикой, которая в первом квадранте имеет вид

$$i = \sqrt{u}.$$

Для решения задачи найдем ток в цепи

$$i(t) = \sqrt{u_{\text{вых}}(t)} = e^{-t}.$$

Напряжение на линейном двухполюснике

$$u_Z(t) = \delta_1(t) - u_{\text{вых}}(t) = \delta_1(t) - e^{-2t}.$$

Сопротивление линейного двухполюсника

$$Z(p) = \frac{U_Z(p)}{I(p)} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2}}{\frac{1}{p+1}} = \frac{2(p+1)}{p(p+2)}.$$

Легко видеть, что $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0$ при любом ω , так что здесь опускается этап аппроксимации. Полученную функцию $Z(p)$ легко реализовать в виде RC -цепи. Полная цепь представлена на рис. 10.2.

Несколько иначе решается задача синтеза в том случае, когда входное и выходное напряжения являются периодическими функциями с одним и тем же периодом T . Ток $i(t) = f[u_{\text{вых}}(t)]$ также будет периодической функцией

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{mk} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t + \alpha_k\right).$$

Пусть периодическое напряжение на линейном двухполюснике равно

$$u_Z(t) = u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{mk} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t + \beta_k\right),$$

Тогда можно найти сопротивление линейного двухполюсника на частотах $2\pi k/T$:

$$Z\left(j\frac{2\pi k}{T}\right) = \frac{\dot{U}_{mk}}{\dot{I}_{mk}}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.8)$$

Таким образом, здесь задача сводится к построению функции

$$Z(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

являющейся ПФФ и удовлетворяющей условию (10.8). На практике условие (10.8) обычно достаточно выполнить лишь для конечного числа значений k .

Если вольт-амперная характеристика нелинейной нагрузки не является монотонно возрастающей или если она такова, что сопротивление $Z(p)$ получается слишком сложным, то можно изменить процедуру синтеза. Один из способов — включение последовательно с заданным нелинейным резистором еще одного нелинейного резистора со специально подобранной вольт-амперной характеристикой. Цель такого включения — сделать всю цепь конвергентной или упростить схему линейного двухполюсника. Другой способ — переход от двухполюсной цепи к четырехполюсной. На вход проектируемого линейного четырехполюсника подается напряжение $u_{вх}(t)$, а выход четырехполюсника нагружается на нелинейную резистивную нагрузку, причем выходное напряжение должно иметь заданную форму $u_{вых}(t)$.

Подробнее о различных подходах к решению рассматриваемой задачи синтеза можно прочитать в [19].

10.3. СИНТЕЗ ЦЕПЕЙ, ОТОБРАЖАЮЩИХ МНОЖЕСТВО ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ ВО МНОЖЕСТВО ВЫХОДНЫХ

Пусть в (10.1) $n > 1$. Таким образом, требуется построить электрическую цепь, которая при нулевых начальных условиях и входном воздействии $x_k(t)$ имела бы выходную реакцию $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$; $n > 1, t \geq 0$.

Для того чтобы задача была корректной, требуется наложить условие однозначности, а именно, если $x_k(t)$ и $x_r(t)$ — входные сигналы, совпадающие при $t \in [0, t_1]$, $k \neq r$, то и реакции цепи $y_k(t)$ и $y_r(t)$ также должны совпадать на том же отрезке времени.

В качестве входных сигналов на практике часто используют ступенчатые функции. Рассмотрим решение задачи для этого случая, т. е. будем считать, что $x_k(t) = a_k \delta_1(t)$, $\delta_1(t)$ — единичная ступенчатая функция,

a_k — вещественные числа, отличные от нуля, $k = 1, 2, \dots, n$, $a_k \neq a_l$, если $k \neq l$.

Один из подходов к решению задачи основан на том, что входные и выходные сигналы связываются соотношением

$$Y_m(p) = \sum_{k=1}^n H_k(p) \mathcal{L}[x_m(t)]^k. \quad (10.9)$$

Здесь \mathcal{L} — оператор прямого преобразования Лапласа, $Y_m(p)$ — изображение по Лапласу реакции $y_m(t)$.

Пусть $x_k(t) = a_k \delta_1(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда $\mathcal{L}[x_m(t)]^k = \frac{a_k^m}{p}$.

Подставляя это выражение в (10.9), получим

$$Y_m(p) = \sum_{k=1}^n \frac{H_k(p)}{p} a_k^m, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (10.10)$$

Полученные выражения можно рассматривать как систему n линейных уравнений с n неизвестными $\frac{H_k(p)}{p}$. Эта система имеет решение и притом единственное, так как ее определитель пропорционален определителю Вандермонда. Таким образом, после решения системы (10.10) выражение (10.9) будет полностью определено и его можно использовать для синтеза требуемой цепи. Согласно (10.9) общая структура цепи имеет такой вид, как показано на рис. 10.3. Здесь символом x_k^v обозначен функциональный преобразователь, возводящий в v -ю степень сигнал, поступающий на его вход. С выхода этого преобразователя сигнал поступает на вход линейной цепи, имеющей передаточную функцию $H_v(p)$. Все блоки предполагаются развязанными, т. е. вход последующего блока не влияет на передаточные свойства предыдущего.

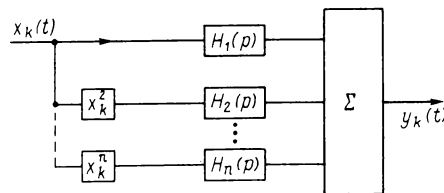


Рис. 10.3

Остановимся на конкретной реализации отдельных блоков. Функциональные преобразователи могут быть реализованы с помощью перемножителей. Сумматор реализуется известными схемами, содержащими операционные усилители. Сложнее решается вопрос о реализации линейных цепей с передаточными функциями $H_k(p)$. Точные значения этих функций, найденные из (10.10), как правило, физически нереализуемы. Поэтому приходится вначале решать задачу аппроксимации. Этапы ее решения подробно обсуждаются в теории линейных электрических цепей [22], поэтому отметим лишь главные моменты.

Первый шаг состоит в замене преобразования Лапласа в (10.10) преобразованием Фурье. Для этого находят спектры $Y_k(j\omega)$ функций $y_k(t)$ в полосе частот, соответствующей ширине спектра. При практических расчетах эти спектры могут быть представлены в табличном виде. Из (10.10) по заданным значениям $Y_m(j\omega)$ находят $H_k(j\omega)$ в том же диапазоне частот. Следующий шаг состоит в аппроксимации найденных в виде таблиц функций $H_k(j\omega)$ дробно-рациональными

функциями $\frac{M_k(j\omega)}{N_k(j\omega)}$ (M_k, N_k — полиномы), такими, чтобы эти

функции были физически реализуемы в заданном элементном базисе. Алгоритмы такой аппроксимации рассматриваются в теории линейных электрических цепей [2, 31]. Последний этап — реализация полученных дробно-рациональных функций методами теории синтеза линейных цепей.

Если включить в допустимый элементный базис линии задержки, то во многих случаях конструирование требуемой цепи упрощается. К таким случаям относится задание желаемых выходных сигналов в виде кусочно-постоянных функций. Тогда передаточные функции будут представлять собой выражения вида $\sum A_k e^{b_k p}$, которые реализуются с помощью линий задержки.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Построить электрическую цепь, у которой при входном ступенчатом напряжении $x_1(t) = \delta_1(t)$ на выходе появляется прямоугольный импульс напряжения длительностью $\tau = 1$ и с амплитудой $U = 1$. При удвоении же входного напряжения выходной сигнал меняет знак.

Для решения задачи найдем изображения выходного напряжения в обоих случаях:

$$Y_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p}; \quad Y_2(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-p}.$$

Подставим полученные выражения в (10.10):

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p} = \frac{H_1(p)}{p} + \frac{H_2(p)}{p};$$

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-p} = \frac{2H_1(p)}{p} + 4 \frac{H_2(p)}{p}.$$

Решая эту систему, получим

$$H_1(p) = 2,5 - 2,5e^{-p}; \quad H_2(p) = -1,5 + 1,5e^{-p}.$$

Очевидно, что каждая из этих функций передачи может быть реализована параллельным соединением усилителя и линии задержки.

Полная схема цепи изображена на рис. 10.4. Здесь символом Π обозначен перемножитель, с его помощью реализован блок возведения в квадрат; ЛЗ — линия задержки с длительностью задержки $\tau = 1$; ОУ — операционный усилитель, на котором построен сумматор.

Модель проектируемой цепи в форме (10.9) может быть использована и в том случае, когда входные сигналы $x_k(t)$ отличны от ступенчатых функций. Единственным требованием к входным сигналам является условие, чтобы определитель системы (10.9) относительно p не был тождественно равен нулю. Отметим также, что модель (10.9) может быть использована для формирования заданных периодических сигналов на выходе из заданных входных, имеющих тот же период [12].

Обратимся к решению задачи (10.2). Задача (10.2), т. е. синтез цепи, отображающей континуальное множество входных сигналов в континуальное множество выходных, является более трудной и пока еще полностью не решенной.

Один из путей ее решения — замена непрерывного параметра дискретным. Если $a \in [a', a'']$, то можно взять конечное число дискретных значений a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, $a_k \in [a', a'']$ и тогда задача (10.2) сведется к задаче (10.1).

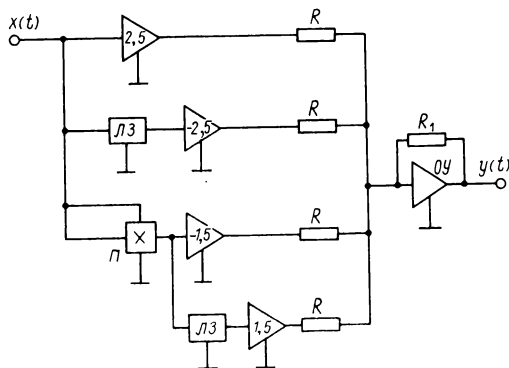


Рис. 10.4

Такой путь, однако, возможен лишь для небольших n , так как трудности вычислительного характера и громоздкость цепи резко возрастают с ростом n .

Другие пути, не сводящие непрерывный параметр к дискретному, разработаны для частных случаев зависимости входных и выходных сигналов от параметра a .

Простейший, но интересный с практической точки зрения случай предполагает, что входной сигнал $x(a, t)$ линейно зависит от скалярного параметра a :

$$x(a, t) = a \varphi(t), \quad (10.11)$$

а выходные сигналы описываются следующим выражением:

$$y(a, t) = f(a) \psi(t). \quad (10.12)$$

Предположим, что $\psi(t)$ — это импульс, т. е. $\psi(t) \equiv 0$ при $t > \tau$, а $f(a)$ — полином:

$$f(a) = \sum_{k=1}^n C_k a^k. \quad (10.13)$$

В (10.13) суммирование ведется, начиная с $k=1$, так как только в этом случае $f(0) = 0$, т. е. при равенстве нулю входного сигнала $x(a, t)$ выходной $y(a, t)$ тоже равен нулю.

Как показано в [12], решение задачи дается следующим выражением:

$$Y(a, p) = \sum_{k=1}^n H_k(p) a^k \mathcal{L} [\varphi(t)]^k, \quad (10.14)$$

в котором

$$H_k(p) = \frac{C_k \Psi(p)}{\mathcal{L} [\varphi(t)]^k}, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (10.15)$$

Здесь $Y(a, p)$ и $\Psi(p)$ — изображения по Лапласу соответственно функций $y(a, t)$ и $\psi(t)$, \mathcal{L} — оператор прямого преобразования Лапласа.

Как видно из (10.14), схема синтезируемой цепи может быть представлена в виде рис. 10.5.

Реализация передаточных функций $H_k(p)$ может быть в общем случае выполнена на основе аппроксимации в частотной области по методике, изложенной выше. В частных случаях могут быть использованы более простые методики [12].

До сих пор как при решении задачи (10.1), так и при решении задачи (10.2) предполагалось, что выходные сигналы являются им-

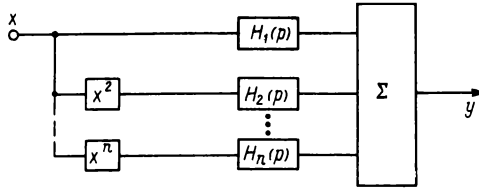


Рис. 10.5

пульсными. Однако не представляет труда распространить описанные подходы на тот случай, когда входные и выходные сигналы являются периодическими функциями, причем период выходного сигнала равен или кратен периоду входного.

Пусть, как и прежде, входной сигнал задан в виде (10.11), но $\varphi(t)$ — периодическая функция с периодом T . Требуется построить цепь, на выходе которой в установившемся режиме воспроизводился бы с заданной точностью сигнал в виде (10.12), причем $\psi(t)$ — периодическая функция с периодом T , а $f(a)$ по-прежнему описывается выражением (10.13).

За основу при решении задачи вновь примем модель, подобную (10.14), только передаточные функции определяются иначе. Пусть имеют место следующие разложения в ряды Фурье:

$$\psi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r \cos\left(\frac{2\pi r t}{T} + \alpha_r\right);$$

$$[\varphi(t)]^k = \sum_{r=0}^{\infty} B_{rk} \cos\left(\frac{2\pi r t}{T} + \beta_{rk}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.16)$$

Передаточные функции $H_k(p)$ в этом случае достаточно определить только в дискретных точках при $p = j \frac{2\pi r}{T}$, $r = 0, 1, \dots$

Если в (10.14) перейти во временную область и учитывать только установившийся режим, то правая и левая части уравнения должны быть равны между собой на каждой гармонике. Это условие будет выполнено, если положить

$$H_k\left(j \frac{2\pi r}{T}\right) = C_k \frac{\dot{A}_r}{\dot{B}_{rk}}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (10.17)$$

\dot{A}_r и \dot{B}_{rk} — комплексные амплитуды соответствующих гармоник в (10.16).

Действительно, для r -й гармоник в силу (10.14) находим

$$\left(\sum_{k=1}^n C_k a^k \right) \dot{A}_r = \sum_{k=1}^n H_k \left(j \frac{2\pi r}{T} \right) a^k \dot{B}_{rk}.$$

Отсюда, учитывая (10.17), получим тождество.

Отметим, что (10.17) накладывает определенные ограничения на применимость рассматриваемого подхода. Так как реализовать передаточные функции с бесконечным усилением невозможно, то из (10.17) вытекает требование, чтобы \dot{B}_{rk} не было равно нулю, когда $\dot{A}_r \neq 0$.

В качестве примера рассмотрим синтез цепи, которую можно назвать удвоитель частоты — стабилизатор. Эта цепь при входном напряжении $x(a, t) = a \cos \omega t$ должна давать на выходе в установившемся режиме напряжение

$$y(a, t) = f(a) \cos 2\omega t, \quad (10.18)$$

причем $f(a) \approx 1$, если $0,9 \leq a \leq 1,1$.

Условие (10.18) можно выполнить, если аппроксимировать функцию $f(a)$ в указанном интервале a полиномом $f_1(a)$:

$$f_1(a) = \sum_{k=1}^n C_k a^k.$$

Этот полином целесообразно выбрать таким, чтобы для нечетных k выполнялось условие $C_k = 0$.

В этом случае в модели (10.14) будут только слагаемые с четными номерами. Для решения задачи об удвоении частоты нужны именно такие слагаемые.

На основе сказанного можно предложить следующий полином $f_1(a)$:

$$f_1(a) = 3a^2 - 3a^4 + a^6.$$

Задача о том, является ли этот полином оптимальным, не рассматривалась, но нетрудно убедиться в том, что если $0,9 \leq a \leq 1,1$, то

$$|1 - f_1(a)| \leq 0,01.$$

Таким образом, изменение амплитуды входного сигнала на 10% приводит к отклонению амплитуды выходного сигнала не более чем на 1%.

Для получения передаточных функций $H_k(j\omega)$ запишем ряды Фурье для четных степеней $\cos \omega t$:

$$(\cos \omega t)^2 = 0,5 + 0,5 \cos 2\omega t;$$

$$(\cos \omega t)^4 = 0,375 + 0,5 \cos 2\omega t + 0,125 \cos 4\omega t;$$

$$(\cos \omega t)^6 = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2\omega t + \frac{3}{16} \cos 4\omega t + \frac{1}{32} \cos 6\omega t.$$

Отсюда на основе (10.17) получаем

$$H_1 \equiv H_3 \equiv H_5 \equiv 0; \quad H_2(0) = H_4(0) = H_6(0) = 0;$$

$$H_2(j2\omega) = 6; \quad H_4(j2\omega) = -6; \quad H_6(j2\omega) = \frac{32}{15};$$

$$H_2(j4\omega) = H_4(j4\omega) = H_6(j4\omega) = H_2(j6\omega) = H_4(j6\omega) = H_6(j6\omega) = 0.$$

Один из возможных вариантов реализации цепи показан на рис. 10.6. В этой цепи вместо трех безынерционных преобразователей x^2 , x^4 и x^6 и соответственно трех передаточных функций, как того требует модель (10.14), использован один преобразователь и одна линейная цепь. Это оказалось возможным потому, что $x(t)$ представляет собой гармонический сигнал. Параметры цепи можно выбрать бесконечным числом способов, но требуется выполнение соотношений:

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 4\omega; \quad \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = 6\omega \quad \text{и} \quad Z_{a\delta}(j2\omega) = 0,$$

где $Z_{a\delta}$ — сопротивление продольной ветви между точками a и δ на рис. 10.6.

Перейдем к более сложной задаче синтеза, когда выходной сигнал зависит от параметра a следующим образом:

$$y(a, t) = \sum_{k=1}^n a^k \psi_k(t).$$

Входной сигнал по-прежнему задан в виде $x(a, t) = a \varphi(t)$.

Эта задача может быть сведена к предыдущей. Для этого необходимо синтезировать отдельно n каналов, которые имеют на входе одно и то же напряжение $x(a, t)$, а на выходе k -го канала формируется сигнал $a^k \psi_k(t)$ по изложенной выше методике. Затем все выходные сигналы суммируются.

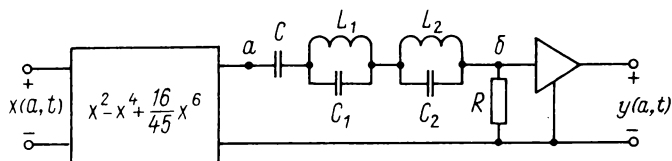


Рис. 10.6

Если еще более усложнить задачу и потребовать, чтобы и выходной сигнал $y(a, t)$, и входной $x(a, t)$ нелинейным образом зависели от a , то сейчас трудно указать достаточно простой и универсальный способ решения этой задачи. Многое зависит от конкретного вида функций $x(a, t)$ и $y(a, t)$. Некоторые подходы изложены в [12].

Многообещающий подход, реализованный уже для многих задач, предложен А. А. Ланнэ [23]. Он основан на идее так называемого расщепления. Пусть $x(a, t)$ — входной сигнал, зависящий от непрерывного параметра a , а $y(a, t)$ — желаемый непрерывный выходной сигнал.

Поставим вопрос, можно ли построить нелинейный безынерционный преобразователь, однозначно отображающий входной сигнал в выходной, т. е. существует ли однозначная функция f такая, что $f(x) = y$ с заданной точностью.

Ответ на этот вопрос в общем случае будет отрицательным. Действительно, если в различные моменты времени t_1 и t_2 при фиксированном a

$$x(a, t_1) = x(a, t_2),$$

то ввиду однозначности функции f должно быть

$$f[x(a, t_1)] = f[x(a, t_2)],$$

т. е.

$$y(a, t_1) = y(a, t_2). \quad (10.19)$$

Следовательно, если выходная функция (которая часто задается независимо от входной) не обладает свойством (10.19), то поставленная задача не имеет решения.

Для преодоления этой трудности А. А. Ланнэ предложил вначале преобразовать (расщепить) сигнал $x(a, t)$ в несколько сигналов $x_1(a, t)$, $x_2(a, t)$, ..., $x_n(a, t)$. Эти несколько сигналов образуют вектор

$$x(a, t) = [x_1(a, t) \quad x_2(a, t) \quad \dots \quad x_n(a, t)],$$

который должен обладать следующим свойством: если $a \in A$, $t_1 \neq t_2$, то при любых $a_1 \in A$ и $a_2 \in A$

$$x(a, t_1) \neq x(a, t_2). \quad (10.20)$$

Далее строится полином $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ относительно n переменных такой, что с заданной точностью

$$y(a, t) = f[x_1(a, t), x_2(a, t), \dots, x_n(a, t)]. \quad (10.21)$$

Условие (10.20) гарантирует, что в разные моменты времени переменные x_1, x_2, \dots, x_n будут принимать различные значения, а значит, не возникает проблемы, связанной с нежелательным равенством (10.19).

В силу теоремы Вейерштрасса—Стоуна [23] для любой непрерывной функции $y(a, t)$ существует полином $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, аппроксимирующий с заданной точностью функцию $y(a, t)$. В настоящее время задача построения многомерного аппроксимирующего полинома уже имеет алгоритмическое и программное решение.

Таким образом, синтезируемая цепь должна состоять из устройства, расщепляющего входной сигнал $x(a, t)$ на n сигналов $x_k(a, t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, и нелинейного безынерционного преобразователя (НБП), осуществляющего отображение (10.21).

На практике часто требуется, чтобы на выходе устройства сигнал был равен нулю до тех пор, пока не появится входной сигнал. По отношению к НБП это требование приводит к условию

$$f(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (10.22)$$

Отсюда возникает второе требование к вектору $x(a, t)$: при любом $a \in A$ и $t > 0$

$$x(a, t) \neq 0. \quad (10.23)$$

Проистекает оно из того, что если бы при $t_1 > 0$ выполнялось равенство $x(a, t_1) = 0$, из него следовало бы в силу (10.22), что $y(a, t_1) = 0$.

Так как при независимом задании входного и выходного сигналов последнее равенство обычно не имеет места, отсюда и вытекает условие (10.23).

Итак, в изложенном подходе задача синтеза сводится в первую очередь к задаче расщепления. Следует отметить, что эта задача сама по себе является непростой и в общем случае пока не решена. Однако для многих конкретных классов входных сигналов ее решение все же удается получить. Например, во многих случаях можно показать [23], что сигнал будет расщепленным, если в качестве составляющих вектора $x(a, t)$ взять сам входной сигнал и несколько его производных по времени.

В качестве примера рассмотрим входной сигнал

$$x(a, t) = \frac{ae^{-t}}{1+t}, \quad a > 0.$$

Покажем, что его можно расщепить, если присоединить к нему его производную по времени

$$x'(a, t) = -\frac{ae^{-t}}{1+t} - \frac{ae^{-t}}{(1+t)^2}.$$

Таким образом, входной сигнал после расщепления преобразуется в вектор

$$x(a, t) = [x(a, t) \quad x'(a, t)]^T.$$

То, что для этого вектора выполнено условие (10.23), очевидно. Покажем, что выполнено и (10.20). Пусть вопреки (10.20) найдутся такие a_1 и a_2 , что

$$\frac{a_1 e^{-t_1}}{1+t_1} = \frac{a_2 e^{-t_2}}{1+t_2} \quad (10.24)$$

или

$$-\frac{a_1 e^{-t_1}}{1+t_1} - \frac{a_1 e^{-t_1}}{(1+t_1)^2} = -\frac{a_2 e^{-t_2}}{1+t_2} - \frac{a_2 e^{-t_2}}{(1+t_2)^2}. \quad (10.25)$$

Сложив (10.24) с (10.25), получим

$$-\frac{a_1 e^{-t_1}}{(1+t_1)^2} = -\frac{a_2 e^{-t_2}}{(1+t_2)^2}.$$

Отсюда, учитывая (10.24), находим, что $t_1 = t_2$. Таким образом, (10.20) выполнено.

В [23] рассматриваются и другие способы расщепления сигналов, например с помощью задержки сигналов во времени. Изучаются также случаи, когда входной сигнал зависит от нескольких непрерывных параметров. Так, например, показано, что если входной сигнал можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t),$$

то при некоторых естественных ограничениях на функции $\varphi_k(t)$ он может быть расщеплен с помощью цепи, являющейся линейной и стационарной.

Таким образом, во многих практических интересных случаях синтезируемую цепь можно выполнить в виде соединения линейной цепи с постоянными параметрами и нелинейного безынерционного преобразователя. Последний может быть реализован, если говорить о средствах аналоговой техники, с помощью сумматоров, усилителей и перемножителей.

10.4. СИНТЕЗ ЦЕПЕЙ, КОМПЕНСИРУЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ

Общая постановка задачи синтеза была дана в § 10.1. Для ее конкретизации будем считать, что исходная цепь представляет собой четырехполюсник. Этот четырехполюсник является нелинейным (хотя

устройство, моделируемое четырехполюсником, было задумано как линейное). Нередко о таком четырехполюснике имеется настолько подробная информация, что можно указать элемент или группу элементов, ответственных за его нелинейные свойства. Если к тому же возможен доступ к этим или другим элементам, то инженер может, исходя из опыта, интуиции или данных расчета, присоединить дополнительные элементы, уменьшающие нелинейные искажения. Однако такой подход сильно зависит от конкретных свойств исследуемого объекта и является скорее эмпирическим, чем научным.

Поэтому ниже рассматривается другой случай, когда не имеется доступа к внутренним точкам четырехполюсника и он задается только уравнениями, связывающими входное напряжение $u_1(t)$ с выходным $u_2(t)$. Таким образом, здесь компенсация нелинейных искажений возможна лишь путем подключения к внешним выводам четырехполюсника дополнительных корректирующих цепей.

Прежде всего поставим вопрос, должны ли всегда корректирующие цепи быть нелинейными или коррекция возможна и с помощью линейных цепей. В ряде случаев действительно можно ограничиться линейными корректирующими цепями. Проиллюстрируем это следующим примером. Пусть четырехполюсник является безынерционным и зависимость u_2 от u_1 описывается полиномом

$$u_2 = \sum_{k=1}^n a_k u_1^k = a_1 u_1 + \varphi(u_1). \quad (10.26)$$

Здесь через $\varphi(u_1)$ обозначены нелинейные члены. Включим линейный корректирующий четырехполюсник в цепь обратной связи исходного четырехполюсника (рис. 10.7). Пусть коэффициент передачи корректирующего четырехполюсника равен λ (направление передачи указано стрелкой), т. е.

$$u'' = \lambda u_2.$$

Полагая, что четырехполюсники не нагружают друг друга, составим уравнения цепи

$$u_2 = a_1 u' + \varphi(u'); \quad (10.27)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u' + u'' = u' + \lambda u_2 = \\ &= u' + \lambda a_1 u' + \lambda \varphi(u') = \\ &= (1 + \lambda a_1) u' + \lambda \varphi(u'). \end{aligned}$$

(10.28)

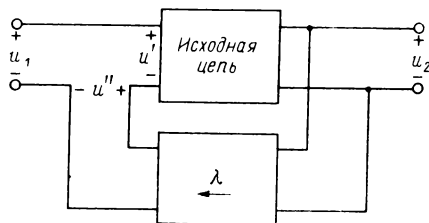


Рис. 10.7

Отсюда видно, что если $|\lambda a_1| \gg 1$, то

$$u_1 \approx \lambda a_1 u' + \lambda \varphi(u') = \lambda u_2.$$

Таким образом, соотношение между входным и выходным напряжением становится линейным.

Аналогичным образом можно решить задачу уменьшения нелинейных искажений линейными цепями обратной связи и для случая, когда исходный четырехполюсник является инерционным. Пусть, например, соотношение вход-выход исходной цепи на рис. 10.7 описывается ВП-полиномом (см. главу 6)

$$u_2(t) = H(p)u_1(t) + A(p)u_1(t). \quad (10.29)$$

Здесь $H(p)$ — линейный оператор, $A(p)$ — ВП-полином, содержащий слагаемые не ниже второй степени.

Проведя почти дословно те же рассуждения, что и раньше, приходим к выводу, что в том диапазоне частот, где $|H(j\omega)\lambda| \gg 1$, получим

$$u_1 \approx \lambda u_2.$$

Таким образом, если спектры входных и выходных сигналов лежат в указанном диапазоне частот, то можно добиться определенной компенсации нелинейных искажений.

Приведенная методика при всей ее простоте не всегда технически реализуема. Во-первых, включение цепи обратной связи может привести к неустойчивости всей цепи. Во-вторых, левые или правые выводы исходного четырехполюсника — это модель реального устройства, у которого выходные или входные сигналы могут иметь неэлектрическую природу. К примеру, исходная цепь может моделировать тракт электроакустического преобразователя радиовещательной аппаратуры. В этом случае входные переменные имеют электрическую природу, а выходное напряжение u_2 моделирует звуковое давление. Таким образом, здесь единственный способ подключения корректирующей цепи — присоединение ее каскадно между источником входного сигнала и левыми выводами цепи на рис. 10.7. Точно так же, если левые выводы цепи имеют неэлектрическую природу, то единственный способ включения корректирующей цепи — присоединение ее каскадно между правыми выводами цепи и нагрузкой.

В дальнейшем изучаются именно эти случаи — каскадное включение корректирующей цепи либо перед исходным четырехполюсником, либо после него. Как будет видно из нижеизложенного, здесь уже не удастся ограничиться линейной цепью и приходится решать более сложную задачу синтеза нелинейной корректирующей цепи.

Вначале уточним постановку задачи и выясним, что понимается под уменьшением нелинейных искажений в строгом математическом смысле.

Прежде всего должно быть задано математическое описание зависимости u_2 от u_1 для цепи на рис. 10.7. Будем считать, что нелинейные искажения малы, то есть эта цепь работает в слабонелинейном режиме. Такое предположение соответствует практике, так как если устройство задумано как линейное, то при качественном исполнении оно действительно будет мало отличаться от линейного.

В этом случае при некоторых не очень жестких ограничениях целесообразно описывать соотношение вход-выход для цепи на рис. 10.7 в виде функционального ряда Вольтерры (см. главу 6), а точнее его отрезка, т. е. функционального полинома. Такой полином может быть построен методами идентификации, описанными в главе 7. Пусть он имеет вид

$$u_2(t) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{r=1}^k u_1(t - \tau_r) d\tau_r. \quad (10.30)$$

Так как это отрезок сходящегося ряда Вольтерры, то естественно считать, что с ростом номера k слагаемые убывают по норме. Поэтому наибольшие нелинейные искажения вносят члены с малыми номерами ($k = 2, 3, \dots$). Отсюда делаем вывод: корректирующую цепь следует проектировать так, чтобы функциональный ряд, описывающий соотношение вход-выход для результирующей цепи, содержал линейный член ($k = 1$), а далее несколько следующих членов ряда равнялись нулю.

Все решения поставленной задачи, предложенные в литературе в явном или неявном виде, предполагают, что отрезок ряда Вольтерры (10.30) представляет собой ВП-полином. Опишем общий подход к решению задачи в этом случае.

Пусть описание вход-выход исходной цепи задано в виде следующего ВП-полинома:

$$u_2(t) = A_1(p)u_1(t) + A_2(p)u_1(t) + \dots + A_n(p)u_1(t). \quad (10.31)$$

Здесь $A_k(p)$ — ВП-полином, содержащий слагаемые только k -й степени, $k = 1, 2, \dots$.

Запишем соотношение (10.31) коротко:

$$u_2(t) = A(p)u_1(t).$$

Идея синтеза компенсирующей цепи состоит в отыскании обратного оператора $A^{-1}(p)$, дающего соотношение

$$u_1(t) = A^{-1}(p)u_2(t), \quad (10.32)$$

и в реализации этого обратного оператора.

Цепь, реализующая этот оператор, включается каскадно перед исходной цепью или после нее. И в том и в другом случае соотношение вход-выход для цепи с коррекцией имеет вид

$$u_2(t) = u_1(t).$$

Такое соотношение характеризует, естественно, идеальный случай. В действительности получаются приближенные соотношения, которые обсуждаются ниже.

Если (10.31) — это отрезок сходящегося ряда Вольтерры, то обратный оператор $A^{-1}(p)$ существует и правая часть (10.32) тоже представляет собой ряд Вольтерры. Найти этот ряд помогает то обстоятельство, что (10.31) представляет собой не просто функциональный полином Вольтерры, а ВП-полином.

Алгоритм обращения ВП-полиномов использует итерации Пикара и приведен в [12]. Опишем его.

Решим уравнение (10.31) относительно $u_1(t)$, пользуясь итерациями Пикара. Первая итерация получается, если в (10.31) сохранить только линейный член, т. е. сохранить уравнение

$$u_2(t) = A_1(p)u_1^{(1)}(t).$$

Отсюда

$$u_1^{(1)}(t) = A_1^{-1}(p)u_2(t). \quad (10.33)$$

Так как $A_1(p)$ — линейный оператор (обычная передаточная функция), то обратный оператор $A_1^{-1}(p)$ существует (по крайней мере в ограниченном спектре частот). Верхний индекс у напряжения $u_1^{(1)}(t)$ означает номер итерации. Следующие итерации определяются выражением

$$u_1^{(k)}(t) = A_1^{-1}(p)u_2(t) - A_1^{-1}(p) \times \\ \times [A_2(p)u_1^{(k-1)}(t) + \dots + A_n(p)u_1^{(k-1)}(t)], \quad k = 2, 3, \dots \quad (10.34)$$

При $k \rightarrow \infty$ получаем ВП-ряд для $u_1(t)$. Если взять отрезок этого ряда, то его можно реализовать с конечным числом элементов.

Пусть, к примеру, исходная цепь описывается следующим ВП-полиномом:

$$u_2(t) = H_1(p)u_1(t) + H_2(p) \{ [H_3(p)u_1(t)]^3 \}. \quad (10.35)$$

Здесь $H_1(p), H_2(p), H_3(p)$ — линейные операторы.

Обратим (10.35). Первая итерация

$$u_1^{(1)}(t) = H_1^{-1}(p)u_2(t).$$

Вторая итерация

$$u_1^{(2)}(t) = H_1^{-1}(p)u_2(t) - H_1^{-1}(p)H_2(p) \times \\ \times \{ [H_3(p)H_1^{-1}(p)u_2(t)]^3 \}. \quad (10.36)$$

Если ограничиться этой итерацией, то (10.36) дает приближенное выражение для обращения выражения (10.35).

СИНТЕЗ АВТОГЕНЕРАТОРОВ И ДЕЛИТЕЛЕЙ ЧАСТОТЫ

11.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Если в нелинейной цепи или системе наблюдаются периодические колебания, в то время как внешнее воздействие является постоянным, то такой режим называется автоколебательным, а сама цепь часто называется автогенератором. Автогенераторы нашли широкое распространение в современной технике. Однако многие схемы автогенераторов разрабатывались изобретательским путем и до недавнего времени существовало очень мало сколько-нибудь строгих и общих подходов к синтезу автогенераторов. Лишь в последние 10–20 лет положение изменилось и появились достаточно обоснованные методы, опирающиеся на строгий математический аппарат и использующие широкие возможности современных ЭВМ. Некоторые из этих методов излагаются в следующем параграфе данной главы.

Если внешнее воздействие — периодическое с периодом T , а реакция цепи — периодическая с периодом nT ($n > 1$ — целое число), то такие колебания называются субгармоническими. Сама цепь часто называется делителем частоты. Все сказанное выше об автогенераторах относится и к делителям частоты. Некоторые из современных методов синтеза делителей частоты излагаются в последнем параграфе данной главы.

Вначале выясним, можно ли построить автогенератор или делитель частоты с помощью линейной цепи. Теоретически ответ на этот вопрос положителен. Действительно, рассмотрим, к примеру, линейную цепь, состоящую из последовательно соединенных элементов L и C . Хорошо известно, что при постоянном напряжении на входе цепи ток в ней будет иметь синусоидальную форму с частотой $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Однако реализовать такую цепь невозможно, так как реальные индуктивности и емкости будут иметь потери энергии и колебания в цепи затухнут. Указанное препятствие можно было бы преодолеть, реализовав индуктивность и емкость с помощью активных цепей, позволяющих компенсировать потери энергии. Однако такие цепи обладали бы очень низкой надежностью, так как малейшие отклонения параметров цепи приводили бы к смещению корней характеристического уравнения с мнимой оси либо в левую, либо в правую полуплоскость. В первом случае колебания затухнут, а во втором — будут неограниченно возрастать.

Другим недостатком подобных цепей является непостоянство амплитуды колебаний. Она зависит как от стабильности постоянного воздействия, так и от начальных условий. Эти и другие недостатки исключают создание автогенераторов с помощью линейных цепей. Те же соображения можно высказать и по поводу делителей частоты.

Таким образом, как автогенераторы, так и делители частоты должны быть синтезированы на основе нелинейных цепей. Перечислим задачи, возникающие в процессе синтеза.

1. Построение математической модели электрической цепи. Сюда входит конструирование уравнения или системы уравнений, решение которых дает требуемый режим автоколебаний или субгармонических колебаний. Однако только получить требуемое решение еще недостаточно. Необходимо обеспечить его устойчивость. Это значит, что уравнение должно быть сконструировано так, чтобы при любых начальных условиях из некоторой области переходный процесс стремился к заданному установившемуся периодическому режиму.

Кроме того, после малых кратковременных отклонений решения от установившегося оно при $t \rightarrow \infty$ снова должно стремиться к установившемуся.

2. Реализация математической модели. Здесь решается задача построения электрической цепи в заданном элементном базисе, уравнения которой совпадают с уравнениями математической модели. Если в качестве элементного базиса взять элементы современной аналоговой или цифровой техники, то синтез соответствующей цепи не вызовет особых затруднений. Сложнее обстоит дело тогда, когда элементный базис по каким-либо практическим соображениям ограничивается. К примеру, для мощных делителей частоты элементный базис состоит из реактивных элементов, причем нелинейность также задается заранее: это нелинейная вебер-амперная характеристика индуктивности. В этом случае задача заметно усложняется, этапы математического моделирования тесно переплетаются с этапом реализации, решения часто носят полувыверистический характер и их строгое обоснование встречает порой серьезные трудности.

3. Исследование полученного математического и схемного решения с помощью ЭВМ. Так как при реализации электрической цепи неизбежны отклонения параметров от расчетных, то необходимо убедиться в том, что такие отклонения не нарушат основного режима работы цепи. Для этого можно промоделировать в уравнениях цепи возможные отклонения и решить эти уравнения на ЭВМ. При этом можно также менять и начальные условия. В результате таких расчетов выявляется отклонение формы колебаний от требуемой и определяется область начальных условий, в которой колебания остаются устойчивыми (область притяжения).

Так как наибольшие принципиальные трудности вызывает решение первой из трех перечисленных задач, то ниже рассматривается имен-

но эта задача. Из всех подходов к ее решению, описанных в литературе, выбраны те, которые наиболее разработаны и достаточно просты в идейном и практическом плане.

11.2. МЕТОДЫ СИНТЕЗА АВТОГЕНЕРАТОРОВ

1. В работах [40, 41] изложен метод конструирования дифференциального уравнения второго порядка, решение которого дает требуемый периодический режим. Уравнение в общем случае имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \quad (11.1)$$

Здесь $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ — однозначная функция двух переменных, которую нужно сконструировать так, чтобы уравнение (11.1) имело заданное периодическое решение. Предельный цикл, соответствующий этому решению на фазовой плоскости, должен быть аттрактором. Иными словами, все траектории вблизи предельного цикла должны притягиваться к нему. Это обеспечивает устойчивость автоколебательного режима.

Прежде всего отметим, что требование однозначности функции f накладывает ограничения на возможные периодические решения уравнения (11.1). Действительно, если в некоторые моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ ($t_1 \neq t_2$) имеют место равенства

$$x(t_1) = x(t_2);$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_2}, \quad (11.2)$$

то отсюда в силу однозначности f следует, что

$$f\left[x(t_1), \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1}\right] = f\left[x(t_2), \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_2}\right].$$

Поэтому из (11.1) получаем

$$\left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_{t=t_1} = \left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_{t=t_2} \quad (11.3)$$

Итак, если, задавшись требуемой периодической функцией $x(t)$, мы обнаружим, что выполняются равенства (11.2), то должно выполняться и равенство (11.3). Очевидно, что если функция $x(t)$ задана

заранее, то условие (11.3) может выполняться только случайно, в некоторых частных случаях.

Поэтому в общем случае на $x(t)$ следует наложить ограничение: если T — период функции $x(t)$, то условия (11.2) одновременно не должны выполняться, если $|t_1 - t_2| < T$. Иными словами, по терминологии А. А. Ланнэ, функции $x(t)$ и dx/dt должны быть расщеплены на периоде (см. главу 10).

Это условие особенно наглядно демонстрируется на фазовой плоскости $x, dx/dt$. Если выполняется условие (11.2), то предельный цикл имеет самопересечения. На рис. 11.1, а показан сигнал $x(t)$ и его предельный цикл, удовлетворяющие условию расщепления, а на рис. 11.1, б — сигнал и предельный цикл, не удовлетворяющие условию расщепления.

Если $x(t)$ не удовлетворяет условию расщепления, то такой сигнал, вообще говоря, невозможно воспроизвести с помощью дифференциальных уравнений второго порядка вида (11.1). Однако можно осуществить предварительное сглаживание сигнала, с тем чтобы новый сигнал удовлетворял условию расщепления и мог быть синтезирован уравнением второго порядка. Например, можно поставить задачу синтеза уравнения, решением которого будет не функция $x(t)$, а интеграл от нее. Из рис. 11.1, б видно, что если провал между двумя максимумами функции $x(t)$ не слишком глубокий, то интеграл от этой функции уже не будет иметь провалов и условия расщепления будут выполнены. При необходимости можно перейти от $x(t)$ к двух-трехкратным интегралам, пока не станут выполняться условия расщепления. В этих случаях после синтеза цепи, реализующей уравнение (11.1), необходимо на выходе цепи включить одно, два, три и т. д. дифференцирующих устройств.

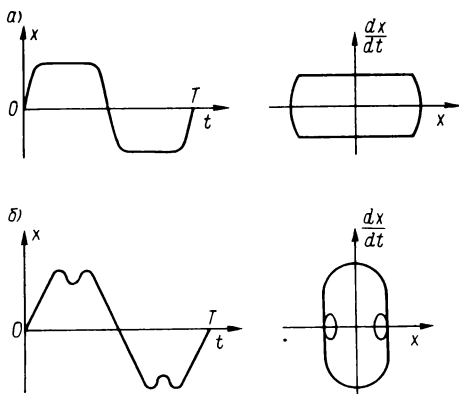


Рис. 11.1

Итак, пусть $x(t)$ удовлетворяет условиям расщепления. Вернемся к уравнению (11.1) и представим функцию $f(x, dx/dt)$ в виде

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f_{\Pi}\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + f_c\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Здесь f_{Π} — функция, соответствующая переходному процессу и обращающаяся в нуль, когда x и dx/dt соответствуют установившемуся режиму; f_c — функция, определяющая установившийся периодический режим.

Положим для удобства $\frac{dx}{dt} = y$ и будем искать функцию f_{Π} в виде

$$f_{\Pi}(x, y) = h(x, y)y. \quad (11.4)$$

Таким образом, уравнение (11.1) приобретает следующий вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + h(x, y) \frac{dx}{dt} + f_c(x, y) = 0 \quad (11.5)$$

или

$$\frac{dy}{dt} + h(x, y)y = -f_c(x, y). \quad (11.6)$$

Для искомого решения, как уже говорилось, должны выполняться условия устойчивости. Потребуем также, чтобы выполнялись условия мягкого возбуждения. Это означает, что положение равновесия $x = 0$, $y = 0$ должно быть неустойчивым. Все эти требования в совокупности приводят к таким фазовым траекториям переходного процесса, какие изображены на рис. 11.2.

Как будет показано ниже, функция $f_c(x, y)$ часто зависит только от x . При этом из (11.6) следует, что неустойчивость в окрестности нуля будет обеспечена, если

$$h(x, y) < 0. \quad (11.7)$$

Потребуем, чтобы это условие выполнялось в любой точке фазовой плоскости, лежащей внутри предельного цикла. Для устойчивости вне предельного цикла потребуем, чтобы в любой такой точке выполнялось неравенство

$$h(x, y) > 0. \quad (11.8)$$

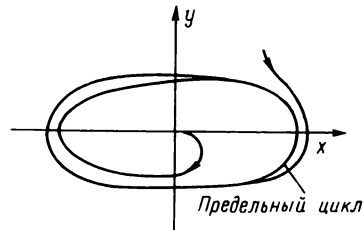


Рис. 11.2

Наконец, так как в установившемся режиме функция $f_{\Pi}(x, y)$ обращается в нуль, в любой точке предельного цикла должно быть

$$h(x, y) = 0. \quad (11.9)$$

Условие (11.9) позволяет построить функцию $h(x, y)$. Пусть

$$x(t) = \varphi(t) \quad (11.10)$$

есть желаемое периодическое решение уравнения (11.1). Тогда можно найти связь между x и y из следующих соображений. Из (11.10) найдем $t = \varphi^{-1}(x)$. Так как

$$y = \frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

то

$$y = \frac{d}{dt} \varphi[\varphi^{-1}(x)]. \quad (11.11)$$

Это выражение определяет прямую связь между y и x , но только при условии, что $\varphi^{-1}(x)$ — однозначная функция. Однако она неоднозначна даже на одном периоде. Поэтому соотношение (11.11) будет различным на разных участках изменения x и y . Для расщепленных функций, т. е. функций, подобных $x(t)$ на рис. 11.1, $\varphi^{-1}(x)$ будет двузначной функцией. Обозначая через $g_1(x)$ значения функции $\varphi^{-1}(x)$, соответствующие возрастанию $x(t)$, и через $g_2(x)$ — значения $\varphi^{-1}(x)$, соответствующие убыванию $x(t)$, получим, что

$$y = \begin{cases} g_1(x) & \text{при } y > 0; \\ g_2(x) & \text{при } y < 0. \end{cases} \quad (11.12)$$

Из (11.12) видно, что в качестве функции $h(x, y)$, удовлетворяющей (11.9), можно принять функцию

$$h(x, y) = \epsilon [y - g_1(x)] [y - g_2(x)], \quad (11.13)$$

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}.$$

Выражение (11.13) можно упростить, если воспользоваться обычно имеющей место симметрией периодической функции $x(t)$. К примеру, для многих функций, в частности синусоиды, функция $y(t)$, соответствующая возрастающему участку $x(t)$, только знаком отличается от $y(t)$ для падающего участка $x(t)$. Тогда, очевидно,

$$g_1(x) = -g_2(x) = g(x).$$

Поэтому вместо (11.13) получим

$$h(x, y) = \epsilon [y^2 - g(x)^2]. \quad (11.14)$$

По найденной функции $h(x, y)$ можно теперь определить функцию $f_c(x, y)$. В установившемся режиме из (11.5) получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + f_c(x, y) = 0.$$

Отсюда, так как

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dx},$$

то

$$y \frac{dy}{dx} = -f_c(x, y)$$

или

$$y dy + f_c(x, y) dx = 0. \quad (11.15)$$

С другой стороны, из (11.9), следует

$$\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy = 0. \quad (11.16)$$

Сравнивая (11.15) и (11.16), получим

$$f_c(x, y) = y \frac{\partial h / \partial x}{\partial h / \partial y}. \quad (11.17)$$

Если для $h(x, y)$ использовать представление (11.14), то получим из (11.17)

$$f_c(x, y) = y \frac{-2g(x)g'(x)\epsilon}{2y\epsilon} = -g(x)g'(x). \quad (11.18)$$

В качестве примера рассмотрим процедуру конструирования уравнения, имеющего установившееся устойчивое периодическое решение $x = \sin t$.

Отсюда $t = \arcsin x$. Так как $y = \frac{dx}{dt} = \cos t$, то при $y > 0$ получим $y = \cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2}$;

при $y < 0$ получим

$$y = \cos \arcsin x = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Следовательно,

$$h(x, y) = \epsilon [y^2 - (1 - x^2)] = \epsilon (y^2 + x^2 - 1). \quad (11.19)$$

Таким образом, функция $g(x)$ здесь будет
 $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Поэтому в силу (11.18)
 $f_c(x, y) = x$.

Итак, окончательно уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \epsilon \left[x^2 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 1 \right] \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (11.20)$$

Нетрудно убедиться в том, что для функции $h(x, y)$, определенной в (11.19), выполнены условия (11.7) и (11.8), т. е. обеспечены устойчивость периодического решения и мягкое возбуждение.

В работах [40, 41] излагается еще ряд способов построения математических моделей автогенераторов. В основе этих способов лежат соображения, близкие к вышеизложенным.

2. В работе [34] авторы метода синтеза автогенератора используют следующую идею. Вначале конструируется так называемое уравнение-прототип. Это линейное уравнение, имеющее заданное, например периодическое, решение. Так как внешнее воздействие по условию постоянно, то линейное уравнение описывает консервативную систему, или, на языке теории цепей, реактивную цепь. Затем к линейному уравнению добавляется нелинейное слагаемое, обращающееся тождественно в нуль, если в него подставить требуемое решение. Нелинейное слагаемое строится так, чтобы обеспечить устройство (хотя бы в малом) требуемого решения.

В простейшем случае, для синтеза генераторов синусоидальных колебаний эта идея была известна еще со времен А. А. Андропова [4]. Однако авторы метода [34] сумели существенно развить ее, так что оказалось возможным конструировать генераторы не только периодических, но и квазипериодических колебаний [34].

Для удобства изложения опишем вначале генератор А. А. Андропова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина. Вначале конструируется следующая линейная система:

$$\frac{dx_1}{dt} = \omega x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -\omega x_1. \quad (11.21)$$

Она имеет решение $x_1 = A \cos \omega t$; $x_2 = -A \sin \omega t$, где A — произвольная амплитуда.

Далее в (11.21) добавляются нелинейные члены:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \omega x_2 + \gamma(G - x_1^2 - x_2^2)x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega x_1 + \gamma(G - x_1^2 - x_2^2)x_2, \quad G > 0.\end{aligned}\tag{11.22}$$

Легко видеть, что нелинейные члены обращаются тождественно в нуль при

$$x_1 = \sqrt{G} \cos \omega t; \quad x_2 = -\sqrt{G} \sin \omega t.\tag{11.23}$$

Таким образом, (11.23) является решением системы (11.22).

Другим решением системы (11.22) является положение равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Для обеспечения мягкого возбуждения это решение должно быть неустойчивым. Линеаризуя задачу в окрестности нуля, приходим к выводу, что неустойчивым в нуле должно быть решение уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \omega x_2 + \gamma G x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega x_1 + \gamma G x_2.\end{aligned}\tag{11.24}$$

Отсюда следует, что хотя бы один корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \gamma G - p & \omega \\ -\omega & \gamma G - p \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad p^2 - 2\gamma G p + \omega^2 + \gamma^2 G^2 = 0$$

должен быть в правой полуплоскости. Это выполняется при любом $\gamma > 0$, так как $G > 0$.

Теперь необходимо обеспечить асимптотическую устойчивость по Ляпунову построенного решения. Для этого проведем в (11.22) замену переменных так, чтобы новые переменные обращались в нуль при условиях (11.23). Тогда новую систему можно будет снова исследовать на устойчивость в окрестности нуля подобно тому, как это было сделано в (11.24).

Достаточно ввести одну переменную $y = G - x_1^2 - x_2^2$. Отсюда

$$\frac{dy}{dt} = -2x_1 \frac{dx_1}{dt} - 2x_2 \frac{dx_2}{dt}.$$

Используя (11.22), получим

$$\frac{dy}{dt} = -2x_1(\omega x_2 + \gamma y x_1) - 2x_2(-\omega x_1 + \gamma y x_2)$$

или

$$\frac{dy}{dt} = -2\gamma y(G - y).$$

Линеаризация этого уравнения в окрестности нуля дает

$$\frac{dy}{dt} = -2\gamma Gy,$$

откуда видно, что асимптотическая устойчивость будет обеспечена при любом $\gamma > 0$.

На самом деле можно показать [4], что для системы (11.22) условие $\gamma > 0$ влечет за собой даже устойчивость в целом периодического решения.

Переходя к изложению подхода авторов [34], ограничимся для простоты случаем, когда требуемое решение имеет вид

$$x(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (11.25)$$

Здесь ω_1 и ω_2 — в общем случае несоизмеримые частоты, т. е. отношение их не есть рациональное число.

Запишем уравнение-прототип

$$\frac{dX}{dt} = KX \quad (11.26)$$

Здесь $X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$; K — кососимметрическая матрица (т. е. $K = -K^T$) специального вида

$$K = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & -b_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.27)$$

Известно, что характеристические числа любой кососимметрической матрицы четного порядка — чисто мнимые [45]. Поэтому нужно только выбрать b_1 , b_2 и b_3 так, чтобы эти характеристические числа равнялись $\pm j\omega_1$; $\pm j\omega_2$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для этого достаточно взять

$$b_1 = b_3 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}; \quad b_2 = \omega_2 - \omega_1. \quad (11.28)$$

Матрица (11.27) с условием (11.28) влечет за собой существование решения уравнения (11.26), такого, что

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (11.29)$$

где a_1, a_2 — произвольные амплитуды; α_1, α_2 — произвольные начальные фазы (для несоизмеримых частот ω_1 и ω_2 задание начальных фаз лишено смысла [3], поэтому в дальнейшем будем контролировать только амплитуды).

Чтобы показать, что (11.29) действительно есть составляющая решения $x(t)$ системы (11.26), подставим (11.29) в (11.26) и вычислим непосредственно остальные составляющие.

Из первого уравнения (11.26) получим

$$\frac{dx_1}{dt} = \sqrt{\omega_1 \omega_2} x_2(t),$$

откуда

$$x_2(t) = -\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (11.30)$$

Из второго уравнения (11.26) находим

$$\frac{dx_2}{dt} = -\sqrt{\omega_1 \omega_2} x_1(t) + (\omega_2 - \omega_1) x_3(t),$$

откуда

$$x_3(t) = a_1 \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (11.31)$$

Из третьего уравнения (11.26) имеем

$$\frac{dx_3}{dt} = (\omega_1 - \omega_2) x_2(t) + \sqrt{\omega_1 \omega_2} x_4(t),$$

откуда

$$x_4(t) = -a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (11.32)$$

Если теперь в четвертое уравнение (11.26)

$$\frac{dx_4}{dt} = -\sqrt{\omega_1 \omega_2} x_3(t)$$

подставить (11.31) и (11.32), то легко убедиться, что получим тождество.

Итак, (11.26) — действительно уравнение-прототип. Основная задача при переходе к нелинейному уравнению — в каком виде выбрать нелинейные члены? Здесь авторы используют специальные свойства решений уравнения (11.26). Умножим обе части уравнения (11.26) на $X^T K^{2m}$:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{2m} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{2m+1} \mathbf{X}. \quad (11.33)$$

Из теории матриц известно, что нечетная степень кососимметрической матрицы есть снова кососимметрическая матрица, а четная степень — симметрическая матрица [45]. Известно также, что -

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = 0, \quad (11.34)$$

если \mathbf{A} — кососимметрическая матрица [45]. Следовательно, из (11.33) получим

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{2m} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = 0. \quad (11.35)$$

Так как матрица \mathbf{K}^{2m} — симметрическая, то

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{2m} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt} \right)^T \mathbf{K}^{2m} \mathbf{X},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{2m} \mathbf{X}) &= \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt} \right)^T \mathbf{K}^{2m} \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{2m} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \\ &= 2 \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{2m} \frac{d\mathbf{X}}{dt}. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Отсюда в силу (11.35)

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{2m} \mathbf{X}) = 0.$$

Поэтому

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{2m} \mathbf{X} = g_m, \quad (11.37)$$

где g_m — вещественные числа. Если заданы частоты ω_1 и ω_2 и амплитуды a_1 и a_2 , то легко убедиться в том, что числа g_m определяются из (11.37) однозначно.

Учитывая (11.37), рассмотрим следующую нелинейную систему:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \left[\mathbf{K} + \sum_{i=0}^1 \gamma_i (g_i - \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{2i} \mathbf{X}) \mathbf{K}^{2i} \right] \mathbf{X}. \quad (11.38)$$

Эта система также имеет решением (11.29), (11.30), (11.31), (11.32), однако амплитуды гармонических составляющих здесь определяются уже однозначно. Постоянные γ_0 и γ_1 пока произвольны. Их

можно выбрать так, чтобы обеспечить неустойчивость в окрестности нуля, т. е. мягкое возбуждение и асимптотическую устойчивость по Ляпунову квазипериодических колебаний.

Для обеспечения условия мягкого возбуждения линеаризуем систему (11.38)

$$\frac{dX}{dt} = \left(K + \sum_{i=0}^1 \gamma_i g_i K^{2i} \right) X$$

и выясним, при каких условиях матрица размерностью 4×4 , стоящая в круглых скобках, имеет хотя бы одно собственное значение в правой полуплоскости. Опуская промежуточные выкладки, приведем сразу готовый результат. Для того чтобы система (11.38) была неустойчива в нуле, достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из двух условий

$$\gamma_0 + \gamma_1 \omega_1^2 [(\omega_2 - \omega_1)^2 + \omega_1 \omega_2] > 0; \quad (11.39)$$

$$\gamma_0 + \gamma_1 \omega_2^2 [(\omega_2 - \omega_1)^2 + \omega_1 \omega_2] > 0.$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости по Ляпунову квазипериодического решения сделаем замену переменных

$$y_0 = g_0 - X^T X; \quad y_1 = g_1 - X^T K^2 X. \quad (11.40)$$

Очевидно, что новые переменные y_0 и y_1 обращаются в нуль, когда X равняется требуемому квазипериодическому решению.

Чтобы записать уравнения в новых переменных, умножим слева уравнение (11.38) сначала на X^T , а затем на $X^T K^2$:

$$\begin{aligned} X^T \frac{dX}{dt} &= X^T K X + \sum_{i=0}^1 \gamma_i (g_i - X^T K^{2i} X) X^T K^{2i} X; \\ X^T K^2 \frac{dX}{dt} &= X^T K^3 X + \sum_{i=0}^1 \gamma_i (g_i - X^T K^{2i} X) X^T K^{2+2i} X. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Если учесть (11.34) и (11.36), то получим из (11.41)

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= -2 \sum_{i=0}^1 \gamma_i y_i (g_i - y_i); \\ \frac{dy_1}{dt} &= -2 \sum_{i=0}^1 \gamma_i y_i X^T K^{2+2i} X. \end{aligned} \quad (11.42)$$

В последнем уравнении слагаемое при $i=0$, т. е. $\gamma_0 y_0 X^T K^2 X$, равно в силу (11.40)

$$\gamma_0 y_0 (g_1 - y_1). \quad (11.43)$$

Что же касается слагаемого при $i = 1$, т. е.

$$\gamma_1 y_1 \mathbf{X}^T \mathbf{K}^4 \mathbf{X}, \quad (11.44)$$

то оно может быть выражено через новые переменные y_0 и y_1 исходя из следующих соображений. Составим характеристическое уравнение для матрицы \mathbf{K} (11.27):

$$\begin{vmatrix} -p & b_1 & 0 & 0 \\ -b_1 & -p & b_2 & 0 \\ 0 & -b_2 & -p & b_3 \\ 0 & 0 & -b_3 & -p \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$p^4 + (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)p^2 + b_1^2 b_3^2 = 0.$$

Согласно теореме Кэли–Гамильтона [46] матрица \mathbf{K} (11.27) удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$\mathbf{K}^4 + (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)\mathbf{K}^2 + b_1^2 b_3^2 = 0.$$

Отсюда с учетом (11.28) находим

$$\mathbf{K}^4 = (\omega_2 - \omega_1)^2 \mathbf{K}^2 - \omega_1^2 \omega_2^2.$$

Подставляя это значение в (11.44), получим

$$\gamma_1 y_1 \mathbf{X}^T \mathbf{K}^4 \mathbf{X} = \gamma_1 y_1 [(\omega_2 - \omega_1)^2 (g_1 - y_1) - \gamma_1 y_1 \omega_1^2 \omega_2^2 (g_0 - y_0)].$$

Итак, окончательно приходим к следующим двум уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= -2 \sum_{i=0}^1 \gamma_i y_i (g_i - y_i); \\ \frac{dy_1}{dt} &= -2 \left\{ \gamma_0 y_0 (g_1 - y_1) + \gamma_1 y_1 [(\omega_2 - \omega_1)^2 \times \right. \\ &\quad \times (g_1 - y_1) - \gamma_1 y_1 \omega_1^2 \omega_2^2 (g_0 - y_0)] \}. \end{aligned} \right\} \quad (11.45)$$

После линеаризации этих уравнений в окрестности нуля приходим к выводу, что для асимптотической устойчивости по Ляпунову требуется, чтобы собственные числа матрицы

$$\begin{bmatrix} -2\gamma_0 g_0 & -2\gamma_1 g_1 \\ -2\gamma_0 g_1 & -2\gamma_1 g_1 (\omega_2 - \omega_1) - \gamma_1 g_0 \omega_1^2 \omega_2^2 \end{bmatrix} \quad (11.45a)$$

лежали в левой полуплоскости.

Если задаться конкретными значениями a_1 и a_2 в (11.25), то по ним определяются g_0 и g_1 . Отсюда уже можно получить количественные ограничения на γ_0 и γ_1 . Так, например, в [34] показано, что если взять $a_1 = a_2 = 0,5$, то собственные числа матрицы (11.45) будут в левой полуплоскости, если

$$\gamma_0 \approx \gamma_1 \omega_1^2 \omega_2^2. \quad (11.46)$$

Итак, условия (11.39) и (11.46) в совокупности определяют ограничения на γ_0 и γ_1 .

Основные этапы изложенной методики остаются неизменными при увеличении числа слагаемых в (11.25).

К недостаткам метода можно отнести то, что он обеспечивает лишь асимптотическую устойчивость по Ляпунову решения. Поэтому целесообразно провести машинные эксперименты с построенными уравнениями (11.45). Цель этих экспериментов — определить, насколько велика область притяжения в окрестности требуемого решения. Полутно можно выяснить, попадем ли мы из начала координат фазового пространства (из области мягкого возбуждения) на требуемое решение. Ведь может оказаться, что фазовая траектория, исходящая из начала координат, будет притянута другим аттрактором (если он существует), отличным от требуемого решения. В рассмотренном выше двухчастотном случае этого не происходит, так как других аттракторов не имеется.

3. Численный метод [9, 10]. Развитие ЭВМ привело к тому, что целый ряд инженерных задач представлялось возможным решать методами, которые казались неприемлемыми и поэтому не рассматривались в математике и технике докомпьютерной эры. Для иллюстрации сказанного приведем простой пример.

Пусть требуется найти вещественные корни полинома $P(x)$ с вещественными коэффициентами при $x \in [x_1, x_2]$. До ЭВМ задача решалась бы с применением специальных методов, например метода Ньютона, схемы Горнера, метода Лобачевского—Греффа и т. д. В наше время инженер вполне может предпочесть этим методам другой, "лобовой" прием. Интервал $x_1 - x_2$ делится на достаточно большое число точек, и в каждой такой точке ЭВМ вычисляет значение $P(x)$. Те значения, которые по модулю меньше заданного ϵ , принимаются равными нулю. Такой подход не является строгим, и есть риск ошибиться, так как полином $P(x)$ может не пересекать ось x в найденной точке, а лишь достаточно близко подходить к оси. Однако, идя на этот риск, инженер получает очень простой и наглядный метод, а вероятность ошибки на практике оказывается достаточно малой.

Аналогичный подход, использующий "умение" ЭВМ контролировать ситуацию в большом числе точек, может быть применен для сингеза автогенераторов. Эта идея описана в работах [9, 10]. Суть ее состоит в следующем.

Пусть $x_1(t) = x_1(t + T)$ есть желаемое T -периодическое решение. Добавим к функции $x_1(t)$ еще $n - 1$ T -периодических функций $x_2(t)$, $x_3(t), \dots, x_n(t)$. Эти функции могут быть выбраны различными способами. Один из них будет описан ниже в примере.

Теперь запишем следующую систему уравнений:

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (11.47)$$

Здесь $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — полиномы относительно n переменных, степени которых определяются в процессе дальнейших расчетов.

Коэффициенты этих полиномов суть неизвестные числа, выбор которых и обеспечивает требуемое решение. Для этого подставим в уравнение (11.47) желаемые периодические функции $x_k(t)$, разделим период T на N одинаковых отрезков и потребуем, чтобы правая и левая части (11.47) отличались на концах отрезков друг от друга по абсолютному значению не более чем на заданное число ϵ . Такое требование приводит к системе линейных неравенств относительно неизвестных коэффициентов полиномов f_k . Если система неравенств оказывается неразрешимой, то можно увеличить степень полиномов f_k , т. е. увеличить число коэффициентов полиномов. Как только система неравенств окажется разрешимой, придем к выводу, что левая и правая части (11.47) достаточно мало отличаются друг от друга, если x — заданная T -периодическая вектор-функция. На основе этого можно заключить, что система (11.47) имеет периодическое решение, близкое к желаемому. Этот вывод — нестрогий, так как можно привести примеры, когда невязка правой и левой частей уравнений мала при $x(t) = f(t)$, однако $f(t)$ сильно отличается от решения уравнения. Тем не менее такие примеры встречаются в практических задачах довольно редко, поэтому с очень большой долей вероятности можно утверждать, что построенное уравнение дает нужное решение. Если все же есть сомнение в этом, то можно всегда вычислить решение по построенному уравнению с помощью ЭВМ.

Однако изложенный алгоритм не дает возможности судить об устойчивости решения. Здесь вновь в отличие от классических подходов, изложенных в предыдущих разделах данного параграфа, предполагается подход, возможный только при наличии мощной ЭВМ. Суть его заключается в следующем. Пусть $x(t)$ — T -периодическая вектор-функция желаемого решения. Пусть $Q(t)$ есть ϵ -окрестность этого решения, т. е. множество таких точек n -мерного пространства, что при любом $t \in [0, T]$

$$\|x(t) - Q(t)\| \leq \epsilon. \quad (11.48)$$

Возьмем произвольную точку множества $Q(t)$, не принадлежащую $x(t)$, и будем считать эту точку начальной. Для устойчивости жела-

емого решения необходимо, чтобы решение, начинающееся из указанной начальной точки, стремилось при $t \rightarrow \infty$ к желаемому решению $x(t)$. Если бы это выполнялось для всех точек множества $Q(t)$, то асимптотическая устойчивость была бы обеспечена.

Вместо того чтобы рассматривать все точки множества $Q(t)$, возьмем конечное, достаточно большое число точек и потребуем, чтобы траектория, исходящая из любой такой точки, была направлена в окрестности этой точки к решению $x(t)$. Таким образом, континуум точек заменяется конечным числом, а стремление любой траектории к решению — гораздо более слабым требованием. Тем не менее можно предполагать, что при достаточно большом числе точек и в этом последнем случае будет обеспечена асимптотическая устойчивость. Описанные требования можно сформулировать на языке линейных неравенств.

Пусть $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ — вектор, взятый из множества $Q(t)$ при некотором значении $t = t_1$. Приняв момент времени $t = t_1$ за начальный и полагая, что для (11.47) имеют место следующие начальные условия:

$$x_k(t_1) = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (11.49)$$

будем решать (11.47) каким-либо явным численным методом.

Найдем решение на первом шаге, т. е. $x_k(t_1 + h)$, $k = 1, 2, \dots, n$, h — шаг расчета. Так как применен явный метод, то $x_k(t_1 + h)$ в явном виде линейно зависит от коэффициентов полиномов $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Обозначая через $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t))$ вектор-функцию желательного периодического решения, потребуем выполнения неравенств

$$|x_k(t_1 + h) - \bar{x}_k(t_1 + h)| < |q_k - \bar{x}_k(t_1)|, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.50)$$

Эти неравенства с определенной точностью эквивалентны требованию, чтобы траектория, исходящая из начальной точки q , была направлена в окрестности этой точки к решению.

Неравенство (11.50) эквивалентно двум неравенствам:

$$\begin{aligned} x_k(t_1 + h) - \bar{x}_k(t_1 + h) &< |q_k - \bar{x}_k(t)|; \\ \bar{x}_k(t_1 + h) - x_k(t_1 + h) &< |q_k - \bar{x}_k(t)|. \end{aligned} \quad (11.51)$$

Каждое из этих неравенств — линейное, так как в них линейным образом входят коэффициенты полиномов f_k .

К неравенствам (11.51), составленным для возможно большего числа различных значений вектора q , следует добавить линейные неравенства, обеспечивающие минимум невязки правых и левых частей (11.47) на желаемом решении. Таких неравенств будет $2N + 2$, где N , как говорилось выше, — число отрезков, на которые разбит период T .

Чтобы иметь представление, какие значения N и какое число точек q практически реальны, отметим, что в настоящее время можно уверенно решать систему из нескольких тысяч линейных неравенств.

Описанная методика позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость решения. На практике еще желательно, чтобы были выполнены условия мягкого возбуждения, т. е. неустойчивость положения равновесия, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. В этом случае, как уже было сказано, система (11.47) линеаризуется и записываются условия неустойчивости линеаризованной системы. Для наиболее интересных для практики случаев, когда $n = 2, 3$, условия неустойчивости приводят дополнительно еще к небольшому числу линейных неравенств.

Приведем примеры автогенераторов, рассчитанных в работах [9, 10].

Генератор синусоидальных колебаний. Пусть желаемый выходной сигнал имеет вид

$$x_1(t) = \sin t.$$

В качестве желаемого сигнала возьмем

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \cos t$$

и ограничимся двумя уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (11.52)$$

Здесь f_2 — полином относительно двух переменных. Таким образом, при таком подходе ответственность за форму решения и устойчивость возлагается только на коэффициенты полинома f_2 , которые находятся из решения системы линейных неравенств.

Расчеты привели к следующим уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -1,039x_1 + 0,0396x_2 - 0,0797x_1^2x_2. \end{aligned} \quad (11.53)$$

Если увеличить число членов полинома f_2 , то можно получить другую систему уравнений, дающую лучшее приближение к чисто синусоидальному решению:

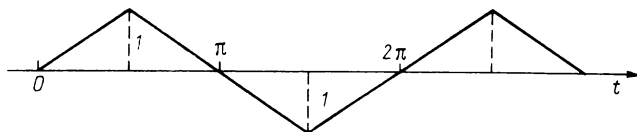


Рис. 11.3

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -1,006x_1 + 0,035x_2 - 0,143x_1^2x_2 - 0,209x_2^3.\end{aligned}\quad (11.54)$$

Аналогичным образом получаются уравнения для генератора треугольных колебаний:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -2,518x_1 + 5,085x_2 - 9,25x_2^3.\end{aligned}\quad (11.55)$$

Форма установившихся колебаний приведена на рис. 11.3.

11.3. МЕТОДЫ СИНТЕЗА ДЕЛИТЕЛЕЙ ЧАСТОТЫ

При синтезе делителей частоты используются соображения, близкие к изложенным выше для автогенераторов. Поэтому ниже лишь вкратце приведены некоторые из существующих подходов.

Метод изложенный в [42, 43], дает возможность синтезировать дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = f(t). \quad (11.56)$$

Пусть для определения $f(t) = \text{const}$ есть целое число и требуется, чтобы вынужденное решение уравнения (11.56) было устойчивым и имело вид

$$x(t) = \cos t.$$

Для решения задачи, как и в автоколебательном случае, представим $F(x, \dot{x})$ в виде

$$F(x, \dot{x}) = f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x, \dot{x}). \quad (11.57)$$

Первое слагаемое правой части определяет переходный процесс и обращается в нуль в установившемся режиме. Второе слагаемое определяет форму установившегося режима.

Для обеспечения устойчивости аналогично с автоколебательным случаем потребуем, чтобы было $f(x, \dot{x}) > 0$ вне предельного цикла, соответствующего установившемуся решению на фазовой плоскости x, \dot{x} .

Внутри предельного цикла должно быть $f(x, \dot{x}) < 0$, а на предельном цикле

$$f(x, \dot{x}) = 0. \quad (11.58)$$

Так как в установившемся режиме $\dot{x} = -\sin t$, то $x^2 + \dot{x}^2 = 1$.

Поэтому простейшей функцией, удовлетворяющей (11.58), будет $f(x, \dot{x}) = x^2 + \dot{x}^2 - 1$.

Итак, (11.56) приобретает следующий вид:

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + g(x, \dot{x}) = \cos nt. \quad (11.59)$$

Параметр ϵ введен для того, чтобы можно было регулировать некоторые свойства уравнения (11.59), например устойчивость.

Для выбора $g(x, \dot{x})$ применим один прием, использующий специальные свойства косинусоидальных функций. Потребуем выполнения равенства

$$g(x, \dot{x}) - \cos nt = x, \quad (11.60)$$

когда $x = \cos t$.

Если бы это равенство было выполнено, то для установившегося режима получили бы автономное уравнение

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

которое имеет решение $x(t) = \cos t$.

Так как $\cos nt = \cos n \arccos x = T_n(x)$, то из (11.60) получаем $g(x, \dot{x}) = T_n(x) + x$,

где $T_n(x)$ — полином Чебышева n -й степени.

Таким образом, уравнение делителя частоты на n приобретает следующий вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \epsilon(x^2 + \dot{x}^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x + T_n(x) = \cos nt. \quad (11.61)$$

К примеру, при $n = 3$ получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \epsilon(x^2 + \dot{x}^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x + 4x^3 - 3x = \cos 3t. \quad (11.62)$$

Это уравнение делителя частоты на три подробно изучено в [42], где, в частности, показано, что субгармонические решения

$$x(t) = \cos\left(t + \lambda \frac{2\pi}{3}\right), \quad \lambda = 0, 1, 2$$

будут устойчивы при $0,85 < \epsilon < 67$.

Численный метод для синтеза уравнений делителя частоты в главных чертах совпадает с методом синтеза автогенераторов. Разница лишь в том, что полиномы f_k в (11.47) будут теперь зависеть и от внешнего периодического воздействия. Обозначив это воздействие через $u(t)$, получим

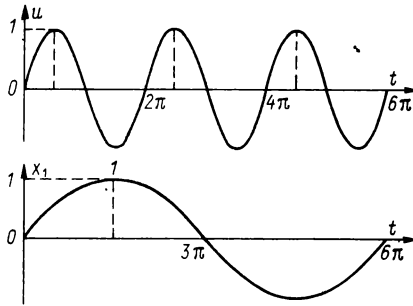


Рис. 11.4

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (11.63)$$

Отличительной особенностью описываемого подхода является тот замечательный факт, что на его основе удастся сконструировать уравнения, которые осуществляют нужный режим деления частоты не при фиксированном внешнем воздействии, а в определенном диапазоне параметров воздействия. Очевидно, что для этого следует составить систему линейных неравенств для нескольких дискретных значений указанных параметров и решать все неравенства совместно.

Приведем два примера, рассчитанных С. А. Букашкиным.

Делитель частоты на два описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1 [u^2 + (\dot{u}/2)^2 - x_1^2 - x_2^2]; \\ \dot{x}_2 &= -1,039x_1 - 0,205x_2 - 0,509x_1^2 + 0,392x_2u. \end{aligned} \quad (11.64)$$

Здесь $u = A \sin t$.

Периодическим решением этого уравнения с периодом 4π является функция $y_1(t) = B \sin 0,5t + \delta$; $|\delta| \leq 0,006B$.

Устойчивое деление частоты на два сохраняется при изменении амплитуды внешнего воздействия A в пределах $0,8 \leq A \leq 1,2$. Амплитуда выходного сигнала B зависит от A нелинейно, но эта зависимость достаточно слабая, так что можно приближенно считать $A \approx B$.

Отметим также, что деление частоты на два сохраняется при изменении частоты внешнего воздействия в пределах $0,98-1,02$.

Делитель частоты на три. Его уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1 [u^2 + (\dot{u}/3)^2 - x_1^2 - x_2^2]; \\ \dot{x}_2 &= -0,99x_1 - 0,204x_2 - 0,176x_1^4 x_2 + 0,316x_2^2 u. \end{aligned} \quad (11.65)$$

Здесь $u = A \sin t$.

Периодическое решение уравнения с периодом 6π имеет вид

$$x_1(t) = B \sin \frac{t}{3} + \delta; \quad |\delta| \leq 0,0041 B.$$

Устойчивое деление частоты на три сохраняется при $0,8 \leq A \leq 1,2$. Как и выше, можно принять $B \approx A$. Деление частоты на три сохраняется при изменении частоты внешнего воздействия в пределах $\pm 3\%$.

Форма входного (u) и выходного (x_1) колебаний для делителя частоты на три изображена на рис. 11.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. Расчет электрических цепей и электромагнитных полей на ЭВМ / М. Г. Александрова, А. Н. Белянин, Р. Брюкнер и др.; Под ред. Л. В. Данилова и Е. С. Филиппова. М.: Радио и связь, 1983.
3. Андронов А. А., Витт А. А. О квазипериодических движениях // Журнал прикладной физики. 1930. № 6. Вып. 1. С. 86–91.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. З. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
5. Бандлер Дж. У., Салама А. Э. Диагностика неисправностей в аналоговых цепях: Пер. с англ. // ТИИЭР. 1985. Т. 73. № 8. С. 35–87.
6. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.
7. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимация Паде: Пер. с англ. М.: Мир, 1986.
8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
9. Букашкин С. А. Математическое моделирование нелинейных динамических схем // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1988. № 6. С. 13–21.
10. Букашкин С. А. Моделирование и синтез нелинейных электронных схем на ЭВМ. Рига: изд-во РКИИГА, 1988.
11. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фужаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.
12. Данилов Л. В. Ряды Вольтерры–Пикара в теории нелинейных электрических цепей. М.: Радио и связь, 1987.
13. Данилов Л. В. Электрические цепи с нелинейными R -элементами. М.: Связь, 1974.
14. Данилов Л. В., Клименко И. И. Оценка работоспособности нелинейных электронных схем // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1989. № 3. С. 23–31.
15. Данилов Л. В., Романюк С. Ф. О синтезе электрических цепей, компенсирующих нелинейные искажения // Электронное моделирование. 1988. № 2. С. 7–13.
16. Данилов Л. В., Соловьева Е. Б. Построение макромоделей нелинейных электрических цепей на основе функциональных полиномов / Сб.: Contributions to the Theory of Electrical Engineering. TH Ilmenau. 1989. S. 21–30.
17. Кабанов Д. А. Функциональные устройства с распределенными параметра-

- ми. Основы теории и расчета. М.: Сов. радио, 1979.
18. Калахан Д. Современный синтез цепей. М.: Энергия, 1966.
 19. Карпов Е. А., Марунчак Л. В., Рядинских А. С. Синтез нелинейных преобразователей. М.: Энергоатомиздат, 1986.
 20. Киншт Н. В., Герасимова Г. Н., Кац М. А. Диагностика электрических цепей. М.: Энергоатомиздат, 1983.
 21. Крюков Б. И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. М.: Машиностроение, 1984.
 22. Ланиэ А. А. Оптимальный синтез линейных электронных схем. М.: Связь, 1978.
 23. Ланиэ А. А. Нелинейные динамические системы: синтез, оптимизация, идентификация. Л.: ВАС, 1985.
 24. Лисицкая И. Н., Синицкий Л. А., Шумков Ю. М. Анализ электрических цепей с магнитными и полупроводниковыми элементами. Киев: Наукова думка, 1969.
 25. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. М.: Высшая школа, 1986.
 26. Мацумото Т. Хаос в электронных схемах: Пер. с англ. // ТИИЭР. 1987. Т. 75. № 8. С. 26–35.
 27. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
 28. Пенфилд П., Спенс Р., Дюинкер С. Энергетическая теория электрических цепей: Пер. с англ. М.: Энергия, 1974.
 29. Пупков К. А., Капалин В. М., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976.
 30. Сверкунов Ю. Д. Идентификация и контроль качества нелинейных элементов радиоэлектронных систем. М.: Энергия, 1975.
 31. Сверкунов Ю. Д., Исаев А. Е. Идентификация нелинейных систем в классе обобщенных радиотехнических звеньев при гармоническом воздействии // Измерение, контроль, автоматизация. 1980. № 12. С. 44–49.
 32. Сверкунов Ю. Д., Исаев А. Е. Об одном методе идентификации нелинейных инерционных систем // Электронное моделирование. 1985. № 5. С. 33–37.
 33. Синицкий Л. А. Элементы качественной теории нелинейных электрических цепей. Львов: Вища школа, 1975.
 34. Синицкий Л. А., Фальштын О. И. Математическая модель генератора квазипериодических колебаний // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 8. С. 1598–1604.
 35. Тихончук С. Т., Павленко В. Д. Идентификация нелинейных динамических объектов в виде рядов Вольтерры во временной области / Сб.: Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложение. Изд-во Саратовского университета, 1985. С. 142–145.
 36. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. Т. 141. Вып. 2. 1983. С. 343–374.
 37. Филиппов Е. Нелинейная электротехника: Пер. с нем. М.: Энергия, 1968.
 38. Чуа Л. О., Пен-Мин-Лин. Машинный анализ электронных схем: Пер. с англ. М.: Энергия, 1980.
 39. Чуа Л. О., Паркер Т. С. Введение в теорию хаотических систем для инженеров: Пер. с англ. // ТИИЭР, 1987. Т. 75. № 8. С. 6–21.
 40. Philippow E. Die Synthese von nichtlinearen elektrischen Netzwerken mit einem

vorgeschriebenen periodischen Verhalten. Ilmenau. IET. 7. N 6. 1977. S. 386–399.

41. **Philippow E., Rhein D.** Beitrag zur Synthese nichtlinearer sinusgeneratoren // Berlin: Nachrichtentechnik. H. 10. 1972. S. 23–31.

42. **Philippow E., Ta D. T.** Ein Beitrag zur Theorie der Frequenzteilung // Proceedings 2. ISTET. TH Ilmenau, 1983. S. 31–38.

43. **Philippow E., Ta D. T.** Synthese dreifacher Frequenzteilerschaltungen. Wien. E. u. M. 1984. S. 48–56.

44. **Philippow E., Brückner P.** Anwendung künstlicher Elemente höherer Ordnung in selektiven Schaltungen // 23 IWK. TH Ilmenau. 1978. Vortragsreihe Theoretische Elektrotechnik. S. 21–26.

45. **Philippow E., Schuchardt D.** Chaotische Lösungen bei der dreifachen Frequenzteilung // Budapest: Periodica Polytechnica Electrical Engineering V. 30. N 4. 1986. S. 159–171.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
ГЛАВА ПЕРВАЯ. ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ	6
1.1. Двухполюсные резистивные элементы	—
1.2. Четырехполюсные и трехполюсные резистивные элементы	10
1.3. Индуктивные элементы	12
1.4. Емкостные элементы	14
1.5. Преобразователи характеристик	—
1.6. Элементы с переменными параметрами	17
1.7. Элементы высшего порядка	19
1.8. Реализация, устойчивость и преобразование элементов высшего порядка	23
ГЛАВА ВТОРАЯ. УРАВНЕНИЯ И АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВ- НЫХ ЦЕПЕЙ	32
2.1. Постановка задачи анализа	—
2.2. О численных методах анализа нелинейных резистивных цепей	34
2.3. Уравнения узловых напряжений нелинейных резистивных цепей	37
2.4. Дискретные линеаризованные схемы анализа нелинейных цепей	39
2.5. Гибридные уравнения нелинейных резистивных цепей	42
2.6. Кусочно-линейный метод анализа нелинейных резистивных цепей	48
2.7. Графический метод эквивалентного преобразования схем	51
ГЛАВА ТРЕТЬЯ. УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	52
3.1. Общие замечания	—
3.2. Составление уравнений состояния нелинейных цепей	55
3.3. О решении уравнений состояния	64
3.4. Качественный анализ процессов в цепях первого порядка	67

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. МЕТОД ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА	73
4.1. Общие замечания	—
4.2. Понятия траектории и фазовой плоскости	75
4.3. Поведение траекторий в окрестности особых точек	79
4.4. Построение фазовых траекторий	85
4.5. О качественной структуре разбиения на траектории	92
4.6. Понятие о бифуркации	99
4.7. Точечные отображения на фазовой плоскости	103
4.8. Установившиеся состояния нелинейных цепей	109
ГЛАВА ПЯТАЯ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ	118
5.1. Общие замечания	—
5.2. Метод возмущений	120
5.3. Метод усреднения	123
5.4. Метод гармонической линеаризации	127
ГЛАВА ШЕСТАЯ. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	132
6.1. Описание электрических цепей на основе функциональных рядов Вольтерры	—
6.2. Построение решения в виде функциональных рядов	135
6.3. Применение функциональных рядов в теории электрических цепей	143
ГЛАВА СЕДЬМАЯ. ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ДИАГНОСТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	152
7.1. Предмет идентификации и диагностики электрических цепей	—
7.2. Задачи идентификации электрических цепей и проблемы, возникающие при их решении	153
7.3. Методы идентификации, основанные на построении операторов, дающих явную зависимость выходных сигналов от входных	155
7.4. Диагностика нелинейных электрических цепей	168
ГЛАВА ВОСЬМАЯ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	174
8.1. Вводные замечания	—
8.2. Применение теоремы Телледжена для исследования свойств нелинейных цепей	175
8.3. Нелинейные конвергентные электрические цепи	185
8.4. Частотные критерии абсолютной устойчивости нелинейных цепей	191
	251

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ. СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ	194
9.1. Постановка задачи синтеза	—
9.2. Синтез резистивных двухполюсников, имеющих заданные вольт-амперные характеристики	195
9.3. Синтез цепей, осуществляющих отображение напряжения в напряжение	202
9.4. Сведение задачи синтеза вебер-амперных и кулон-вольтных характеристик заданного вида к синтезу вольт-амперных характеристик	203
ГЛАВА ДЕСЯТАЯ. СИНТЕЗ ЦЕПЕЙ, ФОРМИРУЮЩИХ ЗАДАННЫЕ СИГНАЛЫ, И ЦЕПЕЙ, КОМПЕНСИРУЮЩИХ НЕ- ЛИНЕЙНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ	205
10.1. Постановка задачи синтеза	—
10.2. Синтез цепей, формирующих заданный сигнал на нелинейной нагрузке	207
10.3. Синтез цепей, отображающих множество входных сигналов во множество выходных	210
10.4. Синтез цепей, компенсирующих нелинейные искажения	220
ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ. СИНТЕЗ АВТОГЕНЕРАТОРОВ И ДЕЛИТЕ- ЛЕЙ ЧАСТОТЫ	225
11.1. Постановка задачи синтеза	—
11.2. Методы синтеза автогенераторов	227
11.3. Методы синтеза делителей частоты	243
Список литературы	247

Производственное издание

ДАНИЛОВ ЛЕВ ВЛАДИМИРОВИЧ

**МАТХАНОВ ПЛАТОН НИКОЛАЕВИЧ
ФИЛИППОВ ЕВГЕН СТОЯНОВ**

**ТЕОРИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

Редактор *Ю. В. Долгополова*
Художник переплета *В. В. Беляков*
Художественный редактор *Т. Ю. Теплицкая*
Технический редактор *Н. А. Минеева*
Корректор *Н. Б. Чухутина*

ИБ № 2416

Подписано в печать с оригинала-макета 20.06.90. М-16624. Формат 60 × 88¹/₁₆.
Бумага офсетная № 2. Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,68.
Усл. кр.-отт. 15,68. Уч.-изд. л. 16,19. Тираж 11 000 экз. Заказ 1056. Цена 1 р. 10 к.

Энергоатомиздат. Ленинградское отделение.
191065 Ленинград, Д-65, Марсово поле, 1.

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинград-
ского объединения "Техническая книга" имени Евгения Соколовой Государ-
ственного комитета СССР по печати.

191126 Ленинград, Социалистическая ул., 14.



Уважаемые читатели!

Предлагаем вашему вниманию следующие книги, вышедшие в 1985–1989 годах:

Автоматизация проектирования аналого-цифровых устройств / Э. И. Гитс, Б. Л. Собкин, С. А. Илюшин и др.: Под ред. Э. И. Гитса. — 1987 г.: 1 р.

Агаханян Т. М., Аствацатурян Е. Р., Скоробогатов П. К. Радиационные эффекты в интегральных микросхемах / Под ред. Т. М. Агаханяна. — 1989 г.: 3 р. 20 к.

Алиев Р. А. Методы интеграции в системах управления производством. — 1989 г.: 1 р. 20 к.

Будаев М. И. Высоочастотные защиты линий 110–220 кВ. — (Б-ка электромонтера). — 1989 г.: 35 к.

Намитоков К. К., Ильина Н. А., Шкловский И. Г. Аппараты для защиты полупроводниковых устройств. — 1988 г.: 1 р. 20 к.

Рабинович Р. С. Автоматическая частотная разгрузка энергосистем. — 2-е изд., перераб. и доп. — 1989 г.: 1 р. 50 к.

Сви П. М. Контроль изоляции оборудования высокого напряжения. — (Надежность и качество). — 1988 г.: 45 к.

Совалов С. А., Семенов В. А. Противоаварийное управление. — 1988 г.: 1 р. 80 к.

Справочник по наладке вторичных цепей электростанций и подстанций / Под ред. Э. С. Мусаэляна. — 2-е изд., перераб. и доп. — 1989 г.: 1 р. 60 к.

Справочник по электротехническим материалам: В 3 т. Т. 3 / Под ред. Ю. В. Корицкого и др. — 3-е изд., перераб. и доп. — 1988 г., 4 р. 10 к.

Справочник по электрическим машинам: В 2 т. Т. 1 и Т. 2 / Под ред. И. П. Копылова и Б. К. Клокова. — 1989 г., 2 р. 70 к. и 3 р. 70 к.

Шульц Ю. Электроизмерительная техника: 1000 понятий для практиков: Пер. с нем. — 1989 г., 2 р. 30 к.

Электротехнический справочник: В 3 т. Т. 3. Кн. 1 и Кн. 2 / Под общ. ред. проф. МЭИ В. Г. Герасимова и др. — 7-е изд., перераб. и доп. — 1988 г., 4 р. 80 к. и 3 р. 90 к.

Заказы на эти книги следует направлять по адресу: 196066, Ленинград, Московский пр., 189, книжный магазин "Энергия", отдел "Книга — почтой".



ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Энергоатомиздат готовит к изданию в 1991 году:

Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. — 2-е изд., перераб. и доп. — 23 л., ISBN 5—283—04513—7 (в пер.): Ориентировочная цена 1 р. 50 к.

Изложены практические методы метрологической оценки результатов измерений (прямых, косвенных, совместных — однофакторных и многофакторных) по паспортным данным используемых средств измерений, путем расчетного суммирования составляющих или статистической обработки многократных отсчетов. Описаны методы идентификации формы распределений на ЭВМ и пути повышения эффективности эксперимента. Первое издание вышло в 1985 г. Второе издание переработано и дополнено.

Для инженерно-технических работников и исследователей всех специальностей, может быть полезна студентам вузов и слушателям факультетов повышения квалификации.

Эраносян С. А. Сетевые блоки питания с высокочастотными преобразователями. — 11 л., ISBN 5—283—04587—0 (в обл.): Ориентировочная цена 80 к.

Описаны особенности проектирования источников вторичного электропитания (ИБЭ) на основе высокочастотной сети (220 В, 50 Гц). Приведены практические рекомендации по обоснованию и выбору силовой части и схемы управления блоков питания. Изложена методика и приведены примеры сквозного расчета ИБЭ различной мощности (от 5 до 200 Вт). Рассмотрены способы защиты силовых высоковольтных транзисторов от перегрузок по току и мгновенной мощности. Имеются необходимые справочные данные для практических расчетов.

Для конструкторов-любителей, занимающихся разработкой и модернизацией электронной аппаратуры, может быть полезна для инженерно-технических работников.

Заказы на эти книги следует направлять по адресу: 196066, Ленинград, Московский пр., 189, книжный магазин "Энергия", отдел "Книга — почтой".



ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ

Ленинградский книжный магазин "Энергия" —
опорный пункт Энергоатомиздата

Это значит, что здесь самый широкий ассортимент научной, учебной, производственной и справочной литературы по всем разделам энергетики:

теплотехнике и теплоэнергетике,
гидротехнике и гидроэнергетике,
электроэнергетике и промышленной энергетике,
электротехнике и промышленной электронике,
ядерной энергетике, технологии и физике,
информационно-измерительной технике.

Магазин принимает заказы на книги, намеченные к выпуску и имеющиеся в наличии.

СПЕЦИАЛИСТЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Указав адрес организации или свой домашний адрес, вы будете систематически получать все рекламные материалы по интересующей Вас тематике и бланки заказа книг Энергоатомиздата.

Адрес магазина "Энергия": 196066, Ленинград, Московский пр., 189

Пользуйтесь услугами магазина — опорного пункта
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТА!

1p.10n